12. *Фиников С.П.* Теория пар конгруэнций. М.: ГИТТЛ, 1956. 444 с.

13. *Фисунов П.А.* Центропроективные связности в расслоениях нормалей первого рода на неголономной гиперполосе / Чуваш. пед. ин-т. Чебоксары, 1998. 17 с. Деп. в ВИНИТИ РАН, №627-В98.

14. *Фисунов П.А.* О нормальных связностях, индуцируемых на оснащенной регулярной гиперполосе. Чуваш. пед. ун-т / Чебоксары, 1998. 20с. Деп. в ВИНИТИ РАН, №3394-В98.

15. *Чакмазян А.В.* Двойственная нормализация // Докл. АН АрмССР. 1959. Т.28. №4. С.151-157.

16. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван: Армянск. пед. ин-т. 1990. 116 с.

17. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Тр.семинара по векторному и тензорному анализу. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1937. Вып.4. С.147-159.

18. *Mihвilescu T.* Geometrie differentialâ projectivâ. Bucureşti Acad. RPR. 494 p.

P.À. F i s u n o v

CENTROPROJECTIVE CONNECTIONS IN NORMAL FIBERINGS OF REGULAR HYPERSTRIP OF PROJECTIVE SPACE

The normal connections on the equipped regular hyperstrip H_m immersed in projective space P_n are considered. It is shown, that on the equipped hyperstrip $H_m \subset P_n$ in fibering of normals of the first genus four centroprojective connections are induced. The invariant conditions of their coincidence are found. The indications are specified, that the normal connection was plain or semi-plain.

УДК 514.75

ДВОЙСТВЕННЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

С.В. Ф и с у н о в а

(×óâàøñêèé ãîñóäàðñòâåííûé ïåäàãîãè÷åñêèé óíèâåðñèòåò)

Рассматриваются двойственные нормальные связности на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов М, погруженном в n-мерное проективное пространство P_n. Доказано, что на оснащенном регулярном распределении гиперплоскостных элементов $M \subset P_n$ в расслоениях нормалей первого и второго родов индуцируются по шесть попарно двойственных центропроективных связностей. Найдены инвариантные условия совпадения связностей.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$\bar{I},\bar{J},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n},\quad I,J,K,L=\overline{1,n},\quad i,j,k,l=\overline{1,n-1},$$

$$\bar{u},\bar{v},\bar{w}=\overline{0,5},\quad u,v,w=\overline{1,5}.$$

1. Рассмотрим n-мерное проективное пространство P_n, отнесенное к точечному проективному реперу $\{A_{\bar{J}}\}$; уравнения инфинитезимальных перемещений репера имеют вид:

$$dA_{\bar{J}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}A_{\bar{K}}, \tag{1}$$

где дифференциальные формы Пфаффа $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства [7]

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{J}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\ \omega_{\bar{L}}^{\bar{L}}=0. \tag{2}$$

Известно [4], что дифференциальные уравнения распределения $M\subset P_n$ в репере нулевого порядка имеют вид:

$$\omega_i^n=\Lambda_{iK}^n\omega_o^K. \tag{3}$$

Совокупность функций $\{\Lambda_{ij}^n\}$ образует тензор первого порядка:

$$\nabla\Lambda_{ik}^n+\Lambda_{ik}^n\omega_o^o=\Lambda_{ikL}^n\omega_o^L. \tag{4}$$

Известно [2], что обращение в нуль кососимметричного тензора $\Lambda_{[ij]}^n$ выделяет класс голономных распределений гиперплоскостных элементов.

Ниже рассматривается регулярное распределение $M\subset P_n$, т. е. $\Lambda\overset{def}{=}\left|\Lambda_{ij}^n\right|\neq 0$

Функция Λ есть относительный инвариант первого порядка:

$$d\ln\Lambda+(n+1)(\omega_o^o+\omega_n^n)=\Lambda_K\omega_o^K,\ \Lambda_K=\Lambda_n^{ji}\Lambda_{ijK}^n. \tag{5}$$

Известно [5], что в третьей дифференциальной окрестности элемента распределения $M\subset P_n$ определяется поле инвариантных соприкасающихся гиперквадрик, уравнения которых записываются в виде:

$$a_{ij}^n x^i x^j+\frac{2b_i}{n+1}x^i x^n+S_n(x^n)^2=2x^0x^n. \tag{6}$$

2. Известно [4], что оснащение в смысле А.П.Нордена [3] распределения $M\subset P_n$ равносильно заданию на нем полей квазитензоров ν_n^i,ν_i^o:

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega_o^K,\ \nabla\nu_i^o+\omega_i^o=\nu_{iK}^o\omega_o^K, \tag{7}$$

определяющих, соответственно, поля нормалей первого и второго родов.

Условием взаимности [3] нормализации $M\subset P_n$ относительно поля соприкасающихся гиперквадрик (6) является выполнение соотношений:

$$b_k=(n+1)(\nu_k^o-a_{ks}^n\nu_n^s). \tag{8}$$

Согласно работе [2], поля геометрических объектов $\{\nu_n^i\},\{\nu_n^i,\nu_n^o\}$, определяют оснащение в смысле Э.Картана [10] подмногообразия M полем точек N_n, принадлежащих нормали первого рода:

$$\nabla\nu_n^i+\omega_n^i=\nu_{nK}^i\omega_o^K,\nabla\nu_n^o+\nu_n^i\omega_i^o+\omega_n^o=\nu_{nK}^o\omega_o^K. \tag{9}$$

Будем говорить, что распределение $M\subset P_n$ оснащено, если оно нормализовано в смысле А.П.Нордена и оснащено в смысле Э.Картана одновременно.

Согласно работе [8], условием неподвижности оснащающей точки $N_n = A_n + \nu_n^i A_i + \nu_n^o A_o$ является выполнение соотношений:

$$\nu_{nK}^o - \nu_n^o \nu_n^i \Lambda_{iK}^n - (\nu_n^o)^2 \delta_K^n = 0, \; \nu_{nK}^i + \nu_n^o \delta_K^i - \nu_n^s \nu_n^i \Lambda_{sK}^n - \nu_n^i \nu_n^o \delta_K^n = 0. \tag{10}$$

Известно [2], что поля геометрических объектов $\{\nu_i^o\}, \{\nu_i^o, \mu_n^o\}$ определяют оснащение в смысле Э.Бортолотти [11] подмногообразия $M \subset P_n$ полем гиперплоскостей Π_{n-1} ($A_o \notin \Pi_{n-1}$), содержащих нормаль второго рода:

$$\nabla \nu_i^o + \omega_i^o = \nu_{iK}^o \omega_o^K, \; \nabla \mu_n^o - \nu_k^o \omega_n^k + \omega_n^o = \mu_{nK}^o \omega_o^K. \tag{11}$$

Функция

$$T_n^o(\nu) \stackrel{def}{=} \mu_n^o - \nu_n^o + \nu_i^o \nu_n^i \tag{12}$$

есть относительный инвариант.

Определение. Будем говорить, что распределение $M \subset P_n$ согласованно оснащено, если оно оснащено в смысле Э.Картана и Э.Бортолотти одновременно и при этом относительный инвариант $T_n^o(\nu)$ обращается в нуль.

3. Известно [8], что на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов $M \subset P_n$ система форм:

$$\begin{aligned} \overset{1\bar{u}}{\theta}{}_n^o &= \omega_n^o + \nu_n^i \omega_i^o - \nu_i^o (\nu_{nK}^i \omega_o^K - \nu_n^i \nu_n^j \omega_j^n) + (\nu_n^o)^2 \omega_o^n + \overset{\bar{u}}{\Gamma}{}_{ni}^n \nu_n^o (\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n), \\ \overset{1\bar{u}}{\theta}{}_n^n &= \omega_n^n + \nu_n^i \omega_i^n - \omega_o^o + \nu_i^o (\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n) + 2\nu_n^o \omega_o^n + \overset{\bar{u}}{\Gamma}{}_{ni}^n (\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n), \end{aligned} \tag{13}$$

где в качестве тензора $\overset{\bar{u}}{\Gamma}{}_{ni}^n$ можно брать различные охваты (например, см. [8]) определяет нормальную связность $\overset{1\bar{u}}{\nabla}{}^\perp$ в расслоении нормалей первого рода.

В силу наличия подмногообразия $\overline{M} \subset \overline{P}_n$, двойственного [5] исходному распределению $M \subset P_n$, системе форм (13) соответствует двойственная ей система форм, имеющих строение вида (13); эта система определяет нормальную связность $\overset{2\bar{u}}{\nabla}{}^\perp$ в расслоении нормалей второго рода, являющуюся двойственной по отношению к связности $\overset{1\bar{u}}{\nabla}{}^\perp$. Формы и функции, входящие в выражения форм (13), пишутся с черточкой сверху. Заменяя формы и функции с черточкой сверху на соответствующие формы и функции без черточки, имеем:

$$\begin{aligned} \overset{2\bar{u}}{\theta}{}_n^o &= \overset{1\bar{u}}{\theta}{}_n^o - \overset{1\bar{u}}{\theta}{}_n^n \nu_n^i \nu_i^o + d(\nu_n^i \nu_i^o) + \mu_n^o (\overset{\bar{u}}{\overline{\Gamma}}{}_{ni}^n - \overset{\bar{u}}{\Gamma}{}_{ni}^n)(\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n) + \mu_n^o \overset{\bar{u}}{\overline{\Gamma}}{}_{ni}^n \overset{1}{\Gamma}{}_{nj}^n \Lambda_n^{ij} \omega_o^n + \\ & T_n^o (\mu_n^o + \nu_n^o - \nu_n^i \nu_i^o) \omega_o^n + T_n^o \overset{\bar{u}}{\overline{\Gamma}}{}_{ni}^n (\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n), \end{aligned} \tag{14}$$

$$\overset{2\bar{u}}{\theta}{}_n^n = \overset{1\bar{u}}{\theta}{}_n^n + 2T_n^o(\nu) \omega_o^n + (\overset{\bar{u}}{\overline{\Gamma}}{}_{ni}^n - \overset{\bar{u}}{\Gamma}{}_{ni}^n)(\omega_o^i - \nu_n^i \omega_o^n) + \overset{\bar{u}}{\overline{\Gamma}}{}_{ni}^n \overset{1}{\Gamma}{}_{nj}^n \Lambda_n^{ij} \omega_o^n.$$

На согласованно оснащенном распределении $M \subset P_n$ система форм (14) при $\bar{u}=0$ имеет вид:

$$\overset{20}{\theta}{}_n^o = \overset{10}{\theta}{}_n^o - \overset{10}{\theta}{}_n^n \nu_n^i \nu_i^o + d(\nu_n^i \nu_i^o), \; \overset{20}{\theta}{}_n^n = \overset{10}{\theta}{}_n^n, \tag{15}$$

а на голономном согласованно оснащенном распределении гиперплоскостных элементов $M \subset P_n$ имеем:

$$\overset{21}{\theta}{}^o_n=\overset{11}{\theta}{}^o_n-\overset{11}{\theta}{}^n_n\nu^i_n\nu^o_i+d(\nu^i_n\nu^o_i)+\mu^o_n\overset{1}{\Gamma}{}^n_{ni}\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o,\ \overset{21}{\theta}{}^n_n=\overset{11}{\theta}{}^n_n+\overset{1}{\Gamma}{}^n_{ni}\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o; \tag{16}$$

$$\begin{gathered}\overset{22}{\theta}{}^o_n=\overset{12}{\theta}{}^o_n-\overset{12}{\theta}{}^n_n\nu^i_n\nu^o_i+d(\nu^i_n\nu^o_i)-\mu^o_n\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)+\mu^o_n\overset{2}{\Gamma}{}^n_{ni}\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o,\\ \overset{22}{\theta}{}^n_n=\overset{12}{\theta}{}^n_n-\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)+(\overset{2}{\Gamma}{}^n_{ni}-\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni})\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o;\end{gathered} \tag{17}$$

$$\begin{gathered}\overset{23}{\theta}{}^o_n=\overset{13}{\theta}{}^o_n-\overset{13}{\theta}{}^n_n\nu^i_n\nu^o_i+d(\nu^i_n\nu^o_i)-2\mu^o_n\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)-\mu^o_n\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o,\\ \overset{23}{\theta}{}^n_n=\overset{13}{\theta}{}^n_n-2\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)-\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o;\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}\overset{25}{\theta}{}^o_n=\overset{15}{\theta}{}^o_n-\overset{15}{\theta}{}^n_n\nu^i_n\nu^o_i+d(\nu^i_n\nu^o_i)-6\mu^o_n\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)+\mu^o_n(\overset{5}{\Gamma}{}^n_{ni}-6\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni})\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o,\\ \overset{25}{\theta}{}^n_n=\overset{15}{\theta}{}^n_n-6\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni}(\omega^i_o-\nu^i_n\omega^n_o)+(\overset{5}{\Gamma}{}^n_{ni}-6\overset{3}{\Gamma}{}^n_{ni})\overset{1}{\Gamma}{}^n_{nj}\Lambda^{ij}_n\omega^n_o.\end{gathered} \tag{19}$$

Таким образом, справедливы предложения:

Теорема 1. На оснащенном регулярном распределении гиперплоскостных элементов $M\subset P_n$ в расслоениях нормалей первого и второго родов индуцируются по шесть нормальных попарно двойственных связностей $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{2}{\nabla}{}^\perp$, определяемых, соответственно, системами форм (13) и (14).

Теорема 2. При согласованном оснащении распределения гиперплоскостных элементов $M\subset P_n$:

а) формы двойственных нормальных связностей $\overset{10}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{20}{\nabla}{}^\perp$ связаны соотношениями (15);

б) в случае его голономности формы двойственных нормальных связностей $\overset{1u}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{2u}{\nabla}{}^\perp$ связаны соотношениями (16)-(19), причем $\overset{13}{\nabla}{}^\perp\equiv\overset{14}{\nabla}{}^\perp$, $\overset{23}{\nabla}{}^\perp\equiv\overset{24}{\nabla}{}^\perp$.

Доказаны следующие предложения:

Теорема 3. При согласованном оснащении распределения гиперплоскостных элементов $M\subset P_n$ нормальные связности $\overset{10}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{20}{\nabla}{}^\perp$ могут быть полуплоскими, либо плоскими лишь одновременно.

Теорема 4. В случае согласованного оснащения распределения $M\subset P_n$ двойственные нормальные связности $\overset{10}{\nabla}{}^\perp$ и $\overset{20}{\nabla}{}^\perp$ совпадают тогда и только тогда, когда нормальная связность $\overset{10}{\nabla}{}^\perp$, (а следовательно, и $\overset{20}{\nabla}{}^\perp$) полуплоская.

4. Пусть распределение гиперплоскостных элементов $M\subset P_n$ нормализовано полями квазитензоров ν^i_n,ν^o_i Согласно работе [5], на нормализованном распределении $M\subset P_n$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$.

Доказано следующее предложение:

Теорема 5. Двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ и нормальная связность $\overset{1}{\nabla}{}^\perp$, индуцируемые на оснащенном распределении гиперплоскостных элементов M⊂P_n, обобщенно сопряжены [3] относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой

$$l:\begin{cases}\omega^i_o = l^i\theta,\ D\theta = \theta\wedge\theta^o_o,\\ \omega^n_o = 0,\end{cases}$$

принадлежащей распределению.

Библиографический список

1. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований. // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т.2 С.275-382.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С.49-94.

3. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.

4. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара /ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

5. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. Чебоксары: Чуваш. пед. ин-т, 1994. 290с.

6. *Столяров А.В.* Двойственная теория регулярного распределения гиперплоскостных элементов в пространстве проективной связности.I // Изв.вузов. Мат. 1980. №1. С.79-82.

7. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948. 432 с.

8. *Фисунова С.В.* Связности в нормальных расслоениях на распределении гиперплоскостных элементов // Деп. в ВИНИТИ РАН. 1998. 15 с. № 418-В98.

9. *Чакмазян А.В.* Нормальная связность в геометрии подмногообразий: Монография. Ереван: Армянск. пед. ин-т, 1990. 116 с.

10. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Тр.семинара по векторному и тензорному анализу. 1937. Вып. 4. С.147-159.

11. *Bortolotti E.* Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. V.3. P. 81-89.

S.V. F i s u n o v a

DUAL LINEAR CONNECTIONS ON DISTRIBUTION OF THE HYPERPLANE ELEMENTS

The dual normal connections on the equipped distribution of the hyperplane elements Ì, immersed in projective space P_n are considered. It is proved, that on the equipped regular distribution of the hyperplane elements in fiberings of normals of the first and second genuses are induced till six pairwise of dual centroprojective connections. The invariant coincidence of concurrence of connections are found.