ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.10 1979

УДК 513.73

С.В.Ведерников

ГЕОМЕТРИЯ ОСНОВНОГО ПРОСТРАНСТВА

В статье изучается орбита G -пространства $M(n+1)$ множества квадратных матриц ($n+1$)-го порядка, G -структура которого определяется отображением

$$G \times M(n+1) \longrightarrow M(n+1) : (a, x) \longrightarrow a x a^{-1}.$$

Здесь G -группа аффинных преобразований или группа движений, и для простоты изложения основное внимание уделяется последнему случаю. Основным пространством мы называем орбиту элемента $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} O_1 & \\ & -E_{n-1} \end{pmatrix}$, где E_{n-1} -единичная матрица. Показывается, что геометрия X строится на основе систематического изучения морфизмов X, $X \times X$ и касательного расслоения $T(X)$ в $M(n+1)$ (см.[1]). Вводится понятие поля основных элементов, и на основе полиномиальных морфизмов строится индуцированная аффинная связность поля (см.[2]). Указываются основные обобщения.

I. Пусть

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & T \end{pmatrix} \middle| \ \bar{a} \in R_n,\ T \in O(n) \right\}$$

группа движений, и $X = \{ a \varepsilon_1 a^{-1} \mid a \in G \}$,

где $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -E_{n-1} \end{pmatrix}$ орбита в G -пространстве $M(n+1)$.Легко видеть, что для $x \in X$ выполняется условие $x^3 = x$,т.е. пространство X является ближайшим обобщением симметрического пространства. Легко устанавливается, что (с точностью до изоморфизма) имеются три полиномиальных морфизма X в $M(n+1)$.

$$e_1 : X \to e_1(X) : x \to E - x^2$$

$$e_2 : X \to e_2(X) : x \to \tfrac{1}{2}(x + x^2)$$

$$e_3 : X \to e_3(X) : x \to \tfrac{1}{2}(x^2 - x).$$

Легко видеть, что

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -C\bar{a} & C \end{pmatrix},\ C = T \varepsilon T^{-1},\ C^2 = E,\ C = C'.$$

и тогда

$$e_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} & 0 \end{pmatrix},\ e_2(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -B\bar{a} & B \end{pmatrix},\ e_3(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\tilde{B}\bar{a} & \tilde{B} \end{pmatrix},$$

где

$$B = \tfrac{1}{2}(E + C),\ B^2 = B,\ B = B',$$

и это есть ортогонально проектирующий оператор на одномерное подпространство. Из результатов статьи [1] следует: $e_1(x)$ есть точечное пространство Эвклида, $e_2(x)$ -пространство гиперплоскостей пространства Эвклида, а $e_3(x)$ -пространство прямых пространства Эвклида E_n. Кроме того, легко видеть, что отображение $x \to (e_1(x), e_2(x))$ есть изоморфизм, и поэтому пространство X есть однородное пространство геометрических образов, каждый из которых состоит из точки и проходящей через нее гиперплоскости.

З а м е ч а н и е 1. Если проводить рассмотрение для случая аффинной группы G, то пространство X есть однородное пространство геометрических образов, каждый из которых состоит из точки и проходящей через нее гиперплоскости и прямой, не лежащей в этой гиперплоскости.

З а м е ч а н и е 2. Геометрический образ пространства X естественно возникает в случае гиперповерхности пространства Эвклида, так как в каждой точке гиперповерхности возникает геометрический образ, состоящий из точки поверхности и касательной гиперплоскости. Таким образом, задание гиперповерхности пространства Эвклида порождает $(n-1)$-мерное подмногообразие в пространстве X. Полученные геометрические образы-элементы X будем называть основными элементами. Отметим, что геометрический смысл для элементов пространства X был выяснен на общем пути – изучении полиномиальных морфизмов.

2. Касательное расслоение $T(X)$ к G-пространству X принадлежит, как можно показать, прямому произведению $X \times M(n+1)$. Оно состоит из пар матриц (x, t), где $x \in X$, а $t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c\bar{v}-\omega\bar{a} & \omega \end{pmatrix}$,

где

$$2\omega = \bar{y}\bar{e}' + \bar{e}\bar{y}', \quad \bar{y} = \frac{d\bar{e}(t)}{dt}\Big|_{t=0}, \quad \bar{v} = \frac{d\bar{a}(t)}{dt}\Big|_{t=0}.$$

Здесь считается, что основной элемент имеет направляющий вектор и проходит через точку $\bar{a}$, $(\bar{e}(t), \bar{a}(t))$ -пара функций определяют кривую $x(t)$ в X. Для полиномиальных морфизмов e_i определяются их дифференциальные продолжения

$$e_i^*: T(x) \longrightarrow T(e_i(x)).$$

В частности,

$$e_1^*(x,t) = \left(x, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix}\right) = (x, v), \quad v = tx + xt.$$

При помощи соответствующих вычислений выводим ряд тождеств

$$\omega^3 - \lambda_0\omega = 0,$$

$$B(\omega^2 - \lambda_0 E) = 0,$$

$$t^4 - \lambda_0 t^2 = 0,$$

$$(E+x)(t^3 - \lambda t) = 0,$$

где

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}\,sp(t^2) = \frac{1}{2}\,sp(\omega^2) = (\bar{y}\bar{y}).$$

Соответственно определяются морфизмы: а/ в векторное эвклидово пространство

$$\varphi_1: T(x) \to \vec{E}_n: (x,t) \to t^3 - \lambda t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (\omega^2 - \lambda E)\bar{u} & 0 \end{pmatrix}$$

и б/ в точечное эвклидово пространство (полагаем $\omega \neq 0$)

$$\varphi_2: T(x) \to E_n: (x,t) \to -\frac{1}{\lambda}(E+x)(t^2 - \lambda E) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \bar{a} - 2B\omega\bar{v} & 0 \end{pmatrix}$$

Геометрический смысл этих морфизмов будет выяснен в п.3.

3. Для перехода из пространства основных элементов в пространство прямых пространства Эвклида следует рассмотреть

морфизм e_3 из X в пространство прямых, а также и его дифференциальное продолжение. Для элемента $(y, t^3) \in T(e_3(x))$ также получаем основные тождества, аналогичные приведенным выше, и полиномиальные морфизмы в векторное и точечное пространства. Выяснение геометрического смысла этих морфизмов приводит к следующему результату: Если рассмотреть в пространстве $e_3(x)$ путь $y(t)$, который представляет из себя линейчатую поверхность, проходящую через данный элемент $y \in e_3(x)$ и имеющую данный касательный вектор t, то морфизм в эвклидово пространство определит центр луча этой линейчатой поверхности (не зависящий от выбора линейчатой поверхности с указанными выше условиями), а морфизм в касательное векторное пространство определит вектор, модуль которого совпадает с модулем параметра распределения этой линейчатой поверхности. Отметим также, что в общем случае для t не имеется никаких других соотношений, кроме полученного ранее тождества $t^4 - \lambda t^2 = 0$, т.е. E, t, t^2, t^3 -линейно независимые. В частном случае возможна зависимость вида $t^3 = \lambda t$, и это характеризует торсовое направление, т.е. путь-линейчатая поверхность, проведенная через данную прямую в данном направлении t, для которого $t^3 = \lambda t$ имеет данную прямую торсовой. Если вдоль всего пути $t^3 = \lambda t$, то линейчатая поверхность будет развертывающейся.

4. Поле основных элементов определим как сечение S в расслоении

$$\xi = (x, p_1, E_n).$$

Это сечение определит его дифференциальное продолжение, которое описывается отображением

$$S^*: (p, \bar{V}) \to (c(p), \omega(\bar{V})).$$

Это сечение определит n-мерное подмногообразие в X, и всякий морфизм можно ограничить на этом подмногообразии.

Особый интерес будет представлять морфизм вида

$$p: T(x) \oplus T(x) \to \vec{E}_n: (x, t, t_1) = t x v_1 = t x (t_1 x + x t_1),$$

где $T(x) \oplus T(x)$ -сумма Уитни для векторных расслоений $T(x)$. Оказывается, что при ограничении p на нашем подмногообразии он определит вторую квадратичную форму распределения, которое определит сечение S (ибо сечение есть отнесение данной точке пространства Эвклида E_n гиперплоскости, проходящей через эту точку). Соответственно определится индуцированная связность распределения (см. [2]).

З а м е ч а н и е 1. Совершенно аналогичное рассмотрение возможно в случае аффинного пространства. Но в этом случае вместо распределения будет определена структура почти произведения. Отметим, что здесь имеется связь с теорией нормализованных поверхностей аффинного пространства.

З а м е ч а н и е 2. С небольшими изменениями здесь возможно рассмотрение (несколько менее подробное) случая, когда $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_k & 0 \\ 0 & -E_{n-k} \end{pmatrix}$, что приводит к теории k-мерных распределений в пространстве Эвклида или же к теории структуры почти произведения в аффинном пространстве.

5. Укажем теперь возможные обобщения. Основное обобще-

ние состоит в рассмотрении пространства $X=\{a\varepsilon_1 a^{-1} \mid a\in G\}$, где $G=GL(n+1,\kappa)$. Это приводит к изучению тройных структур, т.е. элементами пространства X будут тройки направлений, одно из которых одномерное, второе κ-мерное и третье $(n-\kappa)$-мерное. Это соответствует заданию соответствующей тройки в проективном пространстве, где первый элемент будет точкой проективного пространства. Легко понять, что это связано с теорией нормализации А.П.Нордена, когда точке поверхности относится нормаль первого и второго рода, и это есть задание специального подмногообразия в X.

Второе обобщение состоит в том, что рассматривается орбита элемента $\varepsilon_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$, где ε —диагональная матрица с ненулевыми собственными значениями в G-пространстве $M(n+1)$. Здесь G -аффинная группа или группа движений, и в этом случае мы приходим к π-структуре. Также устанавливается изоморфизм между X и пространством наборов образов симметрии. Рассматривая расслоение $\eta=(G,\pi,x)$, где $\pi(a)=a\varepsilon_1 a^{-1}$, для всякого $x\in X$ определится $\pi^{-1}(x)$, которое состоит из реперов $(p,\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n)$, где p -фиксированная точка-центр X, а векторы $\bar{e}_i$ имеют собственные направления оператора $C=T\varepsilon T^{-1}$. Здесь также вводится понятие поля элементов и соответственно вводится индуцированная связность по формуле

$$\bar{\nabla}_x y=\sum e_i \nabla_x (e_i y),$$

где e_i -проектирующие операторы, определенные указанными выше морфизмами в симметрические пространства, а связность ∇ —каноническая связность аффинного пространства. Изучены морфизмы, и оказалось, что все полиномиальные морфизмы из X в $M(n+1)$ не выводят из класса рассматриваемых пространств и приводят лишь к увеличению кратности корней характеристического многочлена элементов пространств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В е д е р н и к о в С.В. Специальные морфизмы пространств.- В кн.: Проблемы геометрии (Итоги науки и техники), 1975, с.49-68.

2. С о л о в ь е в А.Ф. Кривизна и кручение связности, индуцированной распределением в римановом пространстве. Томск, 1976, с.26.

3. У э л л с Р. Дифференциальное исчисление на комплексных многообразиях. М., Мир, 1976.