УДК 514.75

О ДИСКРЕТНЫХ СЕМЕЙСТВАХ ПАРАБОЛ И ТОЧЕК, АССОЦИИРОВАННЫХ С ПОДМНОЖЕСТВАМИ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

В.С. М а л а х о в с к и й

(*Калининградский государственный университет*)

Изучаются пять конечных дискретных семейств S_λ парабол и бесконечные дискретные семейства точек на паре параллельных прямых, порождающие множества простых чисел, в том числе множество простых чисел-близнецов. Высказана гипотеза о периодичности частичного повторения последних двух или трех цифр во множестве простых чисел.

§1. Пять дискретных семейств парабол

Рассмотрим множество $\Lambda=\{3,7,19,31,79\}$ пяти простых чисел. Для каждого $\lambda\in\Lambda$ определим дискретное семейство S_λ парабол :

$$y= f_{a\lambda}(x)\equiv x^2 - a_\lambda x+\frac{1}{4}(a_\lambda^2 +2\lambda+5), \tag{1.1}$$

где a_λ- произвольное нечетное натуральное число, меньшее $\lambda+2$. Семейство S_λ состоит из $\frac{1}{2}(\lambda+1)$ парабол, т.к. $a_\lambda=1,3,5,...,\lambda$.

Квадратичная функция

$$\varphi_\lambda(x) \equiv x^2-x+ \frac{1}{2}(\lambda+3) \tag{1.2}$$

определяет множество M_λ, состоящее из $\frac{1}{2}(\lambda+1)$ простых чисел:

$$M_\lambda=\{k(k-1+ \frac{1}{2}(\lambda+3) \mid k=\overline{1,\frac{1}{2}(\lambda + 1)}\}. \tag{1.3}$$

Число $\frac{1}{2}(\lambda+3)$ является наименьшим из них.

Квадратичные функции (1.1) обладают следующими свойствами:

1) для любого целого неотрицательного $x_o\le\frac{1}{2}(\lambda+ a_\lambda)$ число $f_{a\lambda}(x_o)$ - простое;

2) при любом a_λ числа $f_{a\lambda}(0)$, $f_{a\lambda}(1)$,..., $f_{a\lambda}(\frac{1}{2}(\lambda+a_\lambda))$, определяют одно и то же множество M_λ простых чисел;

3) при любом a_λ

$$f_{a\lambda}(\frac{1}{2}(\lambda+a_\lambda)+1)=\left(\frac{\lambda + 3}{2}\right)^2; \tag{1.4}$$

4) свободные члены всех $\frac{1}{2}(\lambda+1)$ квадратных трехчленов $f_{a\lambda}(x)$, т.е. числа

$$\frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5), \qquad (1.5)$$

определяют то же самое множество M_λ из $\frac{1}{2}(\lambda+1)$ различных простых чисел, а для $[\frac{1}{2}(\lambda+1)+1]$-го нечетного числа $a_\lambda=\lambda+2$ свободный член равен $(\frac{1}{2}(\lambda+3))^2$.

При $\lambda=79$ получаем свойства сорока квадратичных трехчленов, отмеченные в [1].

§2. Семейства простых точек на паре параллельных прямых

Рассмотрим на евклидовой координатной плоскости две параллельные прямые с угловым коэффициентом k=6, проходящими через точки $L_1(0,5)$ и $L_2(0,7)$:

$$y=6x+5,\ y=6x+7. \qquad (2.1)$$

По теореме Дирихле [2] на каждой из этих прямых имеется бесконечное множество точек M(x,y) с целочисленными неотрицательными абсциссами и простыми ординатами.

Известно [2], что любое простое число p, кроме 2 и 3, представимо в одном из двух видов:

$$p=6n-1 \vee p=6n+1,\ n\in N. \qquad (2.2)$$

Так как $6x+5=6(x+1)-1$, $6x+7=6(x+1)+1$, то существуют бесконечные подмножества B_1 и B_2 целых неотрицательных чисел таких, что множества

$$P_1=\{6x+5|x\in B_1\},\ P_2=\{6x+7|x+1\in B_2\} \qquad (2.3)$$

определяют все простые числа, кроме 2 и 3. Значит, для любого простого числа p>3 существует такая целочисленная неотрицательная абсцисса $x\in B_1 \vee x+1\in B_2$, что точка M(x,p) лежит на одной из прямых (2.1).

Так как всякое натуральное число n>3, остаток от деления на 6 которого отличен от 5 и 1, - составное, то для характеристики подмножеств B_1 и B_2 достаточно определить подмножества N_1 и N_2 всех составных неотрицательных чисел, дающих при делении на 6 остаток соответственно 5 и 1. Пусть 6z+5, $z\in N$ - составное число, тогда по крайней мере одно из двух диофантовых уравнений

$$6z+5=p_1t \vee 6z+5= p_2t\ , \qquad (2.4)$$

где $p_1=6h_1+5\in P_1$, $p_2=6h_2+1\in P_2$, $h_2\in N$, $h_1\in N_0=N\cup 0$,имеет бесчисленное множество целых неотрицательных решений. Решая эти уравнения, находим множество

$$Z_1=\{p_1q+h_1 \vee p_2q-(h_2+1)|\ p_1\in P_1,\ p_2\in P_2,\ q\in N\} \qquad (2.5)$$

такое, что

$$N_1=\{6z+5 \mid z\in Z_1\}. \qquad (2.6)$$

Аналогично, рассматривая уравнения

$$6z+1=p_1t \vee 6z+1= p_2t, \qquad (2.7)$$

находим множество

$$Z_2=\{\, p_1q-(h_1+1) \vee p_2q+h_2 \mid p_1 \in P_1,\, p_2 \in P_2,\, q \in N\} \qquad (2.8)$$

такое, что

$$N_2=\{6z+1 \mid z \in Z_2\}. \qquad (2.9)$$

Следовательно,

$$B_1=N \setminus Z_1\,,\; B_2=N \setminus Z_2. \qquad (2.10)$$

Пара {6x+5, 6x+7} простых чисел-близнецов характеризуется условиями

$$x \notin Z_1 \wedge x+1 \notin Z_2. \qquad (2.11)$$

Следовательно,

$$x \notin Z^* =\{p_1q+h_1 \wedge p_2q-(h_2+1) \wedge p_1q-(h_1+2) \wedge p_2q+h_2-1\}. \qquad (2.12)$$

Обозначим

$$B=N_o \setminus Z^*. \qquad (2.13)$$

Анализируя формулу (2.12), убеждаемся, что множество Z^* включает в себя все натуральные числа, оканчивающиеся на 0,3,5,8, а также такие натуральные числа z, что z и z+2 кратны 7, z-1 и z+3 кратны 11,13, z-2 и z+4 кратны 17,19, z-3 и z+5 кратны 23, z-4 и z+6 кратны 29,31, z-5 и z+7 кратны 37, z-6 и z+8 кратны 41,43 и т.д.

Задав произвольное натуральное число m, можно легко составить таблицу всех чисел множества Z^*, меньших числа m. Те же натуральные числа x, которые не вошли в эту таблицу, и число x=0 определят множество всех пар {6x+5,6x+7} простых чисел-близнецов, меньших натурального числа 6m+5, т.е. определят множество простых ординат точек M(x, 6x+5}, N(x, 6x+7}, лежащих на параллельных прямых (2.1) с абсциссами $x \in B \wedge x<m$.

Положив, например, m=3602, получим таблицу значений $x \in B$ для $x<3602$ (табл. 2.1):

0	1	2	4	6	9	11	16	17	22	24	29	31	32	37	39	44
46	51	57	59	71	76	86	94	99	102	106	109	134	136	137	142	146
169	171	174	176	181	191	204	212	214	216	219	237	241	246	247	267	269
277	282	286	297	311	312	321	324	332	337	346	347	351	354	356	372	377
384	389	396	424	431	442	447	451	454	464	466	494	499	519	527	541	542
549	554	559	561	564	576	577	578	589	592	596	611	627	636	641	652	654
666	669	674	681	687	692	762	704	708	709	711	722	736	746	752	757	772
774	788	797	799	821	827	834	836	849	871	879	902	906	916	919	936	941
942	956	974	979	1014	1021	1032	1044	1049	1059	1074	1091	1094	1109	1114	1116	1126
1129	1131	1137	1144	1157	1159	1187	1201	1217	1221	1224	1247	1259	1264	1292	1324	1334
1347	1369	1371	1381	1397	1404	1422	1432	1437	1472	1476	1494	1499	1501	1506	1539	1546
1556	1569	1571	1572	1576	1604	1612	1619	1627	1642	1654	1667	1672	1677	1681	1689	1711
1716	1721	1737	1749	1754	1784	1809	1814	1822	1842	1844	1852	1859	1861	1891	1914	1924
1949	1952	1962	1971	1989	1994	2006	2011	2017	2026	2039	2041	2062	2089	2101	2136	2152
2166	2167	2191	2202	2222	2232	2279	2281	2284	2286	2292	2304	2312	2316	2321	2332	2334
2346	2374	2386	2397	2407	2424	2426	2437	2477	2522	2544	2547	2554	2559	2596	2606	2607
2621	2622	2647	2661	2676	2677	2689	2697	2704	2726	2741	2771	2774	2781	2804	2816	2829
2837	2864	2867	2881	2897	2902	2914	2929	2932	2942	2946	2957	2964	2972	2986	2992	2997
3006	3007	3009	3019	3021	3041	3047	3051	3086	3089	3151	3152	3189	3196	3201	3229	3236
3237	3256	3282	3291	3306	3314	3326	3331	3336	3357	3371	3392	3406	3412	3417	3424	3439
3452	3457	3461	3467	3482	3496	3501	3502	3509	3531	3552	3562	3581	3586	3592	3597	3601

Эта таблица определяет 357 последовательных пар простых чисел-близнецов, начиная от пары {5;7} и кончая парой {21611, 21613}.

§3. Об одной гипотезе, описывающей структуру множества простых чисел

Рассмотрим множество 21 натуральных чисел, состоящее из единицы и произведений четырех простых чисел 7,11,13,17 каждое на себя, а также первых трех из них на последующие простые числа соответственно до 41,23 и 23 включительно. Разобьем это множество на три подмножества A_i (i=0,1,2; табл. 3.1):

A_0	A_1	A_2
1 7•7 7•11 7•13	7•17 7•19 7•23	7•29 7•31 7•37 7•41
	11•11 11•13 11•17	11•19 11•23
	13•13	13•17 13•19 13•23
		17•17

Пусть C_0 - множество всех простых чисел, больших 5, но меньших 100, C_1 - множество всех простых чисел, больших 100, но меньших 200, C_2 - множество всех простых чисел, больших 200, но меньших 300.

Обозначим через M_i объединение множеств A_i и C_i :

$$M_i=A_i \cup C_i \,. \qquad (3.2)$$

Множества M_i определяются следующей таблицей (3.2) :

M_0	01	07	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	49	53
	59	61	67	71	73	77	79	83	89	91	97				
M_1	101	103	107	109	113	119	121	127	131	133	137	139	143	149	151
	157	161	163	167	169	173	179	181	187	191	193	197	199		
M_2	203	209	211	217	221	223	227	229	233	239	241	247	251	253	257
	259	263	269	271	277	281	283	287	289	293	299				

Множество

$$M=M_0 \cup M_1 \cup M_2 \qquad (3.4)$$

состоит из 80 натуральных чисел. Эти числа играют существенную роль в структуре множества простых чисел.

Гипотеза. Для любого натурального числа n и произвольных простых чисел $p_{o,n}$, $p_{1,n}$, $p_{2,n}$, таких, что

$$300n< p_{o,n}<100+300n, \qquad (3.4)$$

$$100+300n< p_{1,n}<200+300n, \qquad (3.5)$$

$$200+300n< p_{2,n}<300(n+1), \qquad (3.6)$$

последние две цифры числа $p_{i,n}$(i=0,1,2) такие же, как последние две цифры одного из чисел множества M_i.

Для n<2160 эта гипотеза справедлива. Рассмотрим, например, случаи n=5, n=50, n=100, n=1000, n=2000.

n	$p_{o,n}$	$p_{1,n}$	$p_{2,n}$
5	1511,1523,1531,1543, 1549,1553,1559,1567, 1571,1579,1583,1597	1601,1607,1609,1613,1619, 1621,1627,1637,1657,1663, 1667,1669,1693,1697,1699	1709,1721,1723,1733,1741, 1747,1753,1759,1777,1783, 1789
50	15013,15017,15031, 15053,15061,15073, 15077,15083, 15091	15101,15107,15121,15131, 15137,15139,15149,15161, 15173,15187,15193,15199	15217,15227,15233,15241, 15259,15263,15269,15271, 15277, 15287,15289,15299
100	30011,30013,30029, 30047,30059,30071, 30089,30091,30097	30103,30109,30113,30119, 30133,30137,30139,30161, 30169,30181,30187,30197	30203,30211,30223,30241, 30253,30259,30269,30271, 30293
1000	300007,300017,300023, 300043,300073,300089	300109,300119,300137, 300149,300151,300163, 300187,300191,300193	300221,300229,300233, 300239,300247,300277, 300299
2000	600011,600043,600053, 600071,600073,600091	600101,600109,600167, 600169	600203,600217,600221,600233, 600239,600241,600247,600269, 600283,600289,600293

Заметим, что для n=10m ($m \in N \wedge m<216$) три последние цифры чисел $p_{1,n}$ и $p_{2,n}$ в формулах (3.5),(3.6) образуют трехзначное число из множеств соответственно M_1 и M_2.

Если высказанная гипотеза неверна, то с помощью ЭВМ можно определить для n верхнюю границу истинности высказанного в гипотезе утверждения. Так как для n<2160 оно истинно, то для нахождения всех простых чисел, больших 100m, но меньших 100(m+1), где m<6479, надо найти остаток i от деления числа m на 3 и исследовать натуральные числа, полученные прибавлением к 100m двузначных чисел из последних двух цифр множества M_i (а не все нечетные числа 100m<x<100(m+1)). Например, для m=879 получаем i=0. Анализируя 26 чисел 87901,87907,...,87997, убеждаемся, что только числа, оканчивающиеся на 11,17,31,43,59,61,73,77,91 являются простыми. Остальные 17 чисел - составные.

Замечание. Учитывая конкретный вид чисел множеств M_o,M_1,M_2, отметим, что высказанная гипотеза не противоречит теореме о простых числах с заданными последними цифрами $c_1,c_2,..,c_m$, где c_m= 1,3,7 или 9 (см.[2], теорема 21).

Библиографический список

1. *Малаховский В.С.* Введение в математику. Калининград, 1998. 440 с.
2. *Трост Э.* Простые числа. М., 1959.

V.S. M a l a k h o v s k y

ON DISCRETE FAMILIES OF PARABOLAS AND POINTS, GENERATING SETS OF PRIME NUMBERS

Five discrete families S_λ of parabolas are studied, generated by prime numbers λ=3;7;19;31;79, and a family of points on the pair of parallel lines, generating prime numbers. The main attention is given to the geometric interpretation of the set of twin primes. Hypothesis is stated about the periodicity of the partial reiteration of the last two digits in the set of prim numbers.