4. *Кретов М.В.* Об асимптотических направлениях комплексов гиперквадрик в аффинном пространстве // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1983. Вып. 14. С. 36—40.

5. *Андреев Б.А.* О дифференцируемом соответствии между точечным пространством и многообразием $R_H(Q)$ гиперквадрик аффинного пространства // Там же. 1978. Вып. 9. С.11—19.

6. *Кретов М.В.* Дифференцируемые отображения, ассоциированные с многообразиями гиперквадрик // Международная конференция по геометрии и приложениям. Смолян, 1986. С. 23.

7. *Кретов М.В.* О главных прямых дифференцируемых отображений, ассоциированных с многообразиями гиперквадрик // Международная научная конференция, приуроченная к 200-летию со дня рождения Карла Густава Якоби и 750-летию со дня основания г. Калининграда (Кёнигсберга). Калининград, 2005. С. 28—31.

8. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между двумя пространствами // Итоги науки «Геометрия-63», / ВИНИТИ./ М., 1965. С. 65—107.

M. Kretov

ABOUT THE MAIN POINTS OF DIFFERENTIATED DISPLAYS ASSOCIATED WITH THE COMPLEX OF HYPERQUADRICS.

Studying of differentiated displays of affine n −space in space central non-degenerate hyperquadrics which images are n −parametrical families hyperquadrics proceeds. The concept of analogue of the main points of dot displays is entered. The geometrical characteristic is given to this analogue.

УДК 514.75

Т.Ю. Максакова

(Российский государственный университет
им. Иммануила Канта)

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ *WH*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Продолжается исследование вырожденных трехсоставных распределений проективного пространства, которые названы *WH*-распределениями [1]. Построен двойственный образ *WH*-распределения относительно инволютивного преобразования (6) структурных форм проективного пространства P_n. Двойственная теория имеет место и для оснащенного *WH*-распределения. Показано, что нормализация одного из вырожденных распределений $\mathrm{WH} \subset \mathrm{P_n}$ или $\overline{\mathrm{WH}} \subset \overline{\mathrm{P_n}}$ равносильна нормализации другого, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями (9).

В работе используется следующая система индексов:
$p, q, s, t = \overline{1, r}$; $i, j, k, l, = \overline{r+1, m}$; ; $\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1}$; $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\gamma} = \overline{m+1, n}$; $s = m - r$; $u, v, w = \overline{r+1, n-1}$; $\hat{u}, \hat{v} = \overline{r+1, n}$; $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C} = (\overline{1, r}; \overline{m+1, n})$; $K, L = \overline{1, n}$; $\rho, \sigma, \tau = \overline{1, n-1}$.

1. *WH*-распределение в репере 1-го порядка R_1 задается уравнениями

$$
\begin{gathered}
\omega_i^n = \Lambda_{i\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \quad \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\hat{\beta}}^\alpha \omega_0^{\hat{\beta}}, \\
\omega_p^n = \Lambda_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_i^p = \Lambda_{i\hat{A}}^p \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_p^\alpha = \Lambda_{p\hat{A}}^\alpha \omega_0^{\hat{A}}, \qquad (1) \\
\omega_\alpha^p = \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K, \\
\nabla \Lambda_{i\beta}^n + \Lambda_{i\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{i\beta K}^n \omega_0^K, \\
\nabla \Lambda_{in}^n + \Lambda_{in}^n \omega_0^0 - \Lambda_{i\beta}^n \omega_n^\beta - \omega_i^0 = \Lambda_{inK}^n \omega_0^K, \\
\nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n + \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_0^0 = \Lambda_{\alpha\beta K}^n \omega_0^K, \\
\nabla \Lambda_{\alpha n}^n + \Lambda_{\alpha n}^n \omega_0^0 - \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta - \omega_\alpha^0 = \Lambda_{\alpha nK}^n \omega_0^K, \\
\nabla \Lambda_{i\hat{\beta}}^\alpha + \Lambda_{i\hat{\beta}}^\alpha \omega_0^0 + \Lambda_{i\hat{\beta}}^n \omega_n^\alpha - \omega_i^0 \delta_{\hat{\beta}}^\alpha = \Lambda_{i\hat{\beta}K}^\alpha \omega_0^K,
\end{gathered}
$$

$$\nabla\Lambda^n_{p\hat{A}} + \Lambda^n_{p\hat{A}}\omega^0_0 - \omega^0_p\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^n_{p\hat{A}K}\omega^K_0,$$

$$\nabla\Lambda^p_{i\hat{A}} + \Lambda^p_{i\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{i\hat{A}}\omega^p_n - \omega^0_i\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^p_{i\hat{A}K}\omega^K_0,$$

$$\nabla\Lambda^\alpha_{p\hat{A}} + \Lambda^\alpha_{p\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{p\hat{A}}\omega^\alpha_n - \omega^0_p\delta^\alpha_{\hat{A}} = \Lambda^\alpha_{p\hat{A}K}\omega^K_0,$$

$$\nabla\Lambda^p_{\alpha\hat{A}} + \Lambda^p_{\alpha\hat{A}}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha\hat{A}}\omega^p_n - \omega^0_\alpha\delta^p_{\hat{A}} = \Lambda^p_{\alpha\hat{A}K}\omega^K_0,$$

$$\nabla\Lambda^i_{pK} + \Lambda^i_{pK}\omega^0_0 + \Lambda^n_{pK}\omega^i_n - \omega^0_p\delta^i_K = \Lambda^i_{pKL}\omega^L_0,$$

$$\nabla\Lambda^i_{\alpha K} + \Lambda^i_{\alpha K}\omega^0_0 + \Lambda^n_{\alpha K}\omega^i_n - \omega^0_\alpha\delta^i_K = \Lambda^i_{\alpha KL}\omega^L_0$$

и соотношениями

$$\Lambda^n_{t[p}\Lambda^t_{|\nu|q]} + \Lambda^n_{\nu n}\Lambda^n_{[pq]} + \Lambda^n_{\nu\beta}\Lambda^\beta_{[pq]} = 0. \tag{2}$$

Вместо тензора Λ^n_{ij}, тождественно равного нулю для *WH*-распределения, следуя работам [2; 3], построены невырожденный тензор 2-го порядка $V^n_{ij} = d^{nk}_i b_{kj}$ и обращенный тензор V^{ij}_n, удовлетворяющие условиям:

$$\begin{gathered} V^n_{ik}V^{kj}_n = V^n_{ki}V^{jk}_n = \delta^j_i; \quad \nabla V^n_{ij} + V^n_{ij}\omega^0_0 = V^n_{ijK}\omega^K_0, \\ \nabla V^{ij}_n - V^{ij}_n\omega^0_0 = V^{ij}_{nK}\omega^K_0, \quad V \overset{def}{=} \det\left\| V^n_{ij} \right\| \neq 0 \end{gathered} \tag{3}$$

Тензоры 1-го порядка $\Lambda^n_{pq}, \Lambda^n_{\alpha\beta}$ невырожденные, т.е. $\Lambda \overset{def}{=} \det\left\|\Lambda^n_{pq}\right\| \neq 0;\quad E \overset{def}{=} \det\left\|\Lambda^n_{\alpha\beta}\right\| \neq 0$, и для них тоже введем соответственно обращенные тензоры $\Lambda^{pq}_n, \Lambda^{\alpha\beta}_n$:

$$\begin{gathered} \Lambda^{pq}_n\Lambda^n_{qt} = \Lambda^{qp}_n\Lambda^n_{tq} = \delta^p_t; \quad \nabla\Lambda^{pq}_n - \Lambda^{pq}_n\omega^0_0 = \Lambda^{pq}_{nK}\omega^K_0, \\ \Lambda^{\alpha\beta}_n\Lambda^n_{\beta\gamma} = \Lambda^{\beta\alpha}_n\Lambda^n_{\gamma\beta} = \delta^\alpha_\gamma; \quad \nabla\Lambda^{\alpha\beta}_n - \Lambda^{\alpha\beta}_n\omega^0_0 = \Lambda^{\alpha\beta}_{nK}\omega^K_0. \end{gathered} \tag{4}$$

Относительные инварианты $\Lambda, V, E, S = \Lambda \cdot V \cdot E$ и функции $H_K = \dfrac{1}{n+1} S_K$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}
& d\ln\Lambda - 2\omega_p^p + r(\omega_0^0 + \omega_n^n) = \Lambda_K \omega_0^K, \\
& d\ln V - 2\omega_k^k + s(\omega_0^0 + \omega_n^n) = V_K \omega_0^K, \\
& d\ln E - 2\omega_\alpha^\alpha + (n-m-1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) = E_K \omega_0^K, \quad (5) \\
& d\ln S - 2\omega_\sigma^\sigma + (n-1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) = S_K \omega_0^K, \\
& \nabla H_K + H_K \omega_0^0 + \delta_K^\sigma \omega_\sigma^0 - \Lambda_{\sigma K}^n \omega_n^\sigma \equiv 0,
\end{aligned}$$

где

$$\Lambda_K = \Lambda_n^{qp} \Lambda_{pqK}^n, \quad V_K = V_n^{ji} V_{ijK}^n, \quad E_K = \Lambda_n^{\beta\alpha} \Lambda_{\alpha\beta K}^n, \quad S_K = \Lambda_K + V_K + E_K.$$

2. Рассмотрим систему из $(n+1)^2$ форм Пфаффа

$$\bar\omega_{\bar K}^{\bar J}: \bar\omega_0^0 = \omega_0^0 - H_J \omega_0^J;$$

$$\bar\omega_0^p = \omega_0^p + \Lambda_n^{pq} \Lambda_{q\hat\alpha}^n \omega_0^{\hat\alpha}; \ \bar\omega_0^n = \omega_0^n;$$

$$\bar\omega_0^i = \omega_0^i + V_n^{ij} \Lambda_{j\hat\alpha}^n \omega_0^{\hat\alpha};$$

$$\bar\omega_0^\alpha = \omega_0^\alpha + \Lambda_n^{\alpha\beta} \Lambda_{\beta n}^n \omega_0^n;$$

$$\bar\omega_p^0 = \Lambda_{qp}^n \omega_n^q; \ \bar\omega_i^0 = V_{ji}^n \omega_n^j;$$

$$\bar\omega_\alpha^0 = \Lambda_{\beta\alpha}^n \omega_n^\beta; \ \bar\omega_n^0 = \omega_n^0;$$

$$\bar\omega_p^n = -\Lambda_{qp}^n \omega_0^q; \ \bar\omega_i^n = -V_{ji}^n \omega_0^j;$$

$$\bar\omega_n^n = \omega_n^n - H_J \omega_0^J;$$

$$\bar{\omega}_p^s = \omega_p^s + \Lambda_n^{sq}\Lambda_{qpK}^n\omega_0^K - \delta_p^s H_J\omega_0^J;$$
$$\bar{\omega}_p^i = -\Lambda_{qp}^n V_n^{ij}\omega_j^q; \qquad (6)$$
$$\bar{\omega}_i^p = -V_{ji}^n\Lambda_n^{pq}\omega_q^j;$$
$$\bar{\omega}_i^k = \omega_i^k - \Lambda_n^{kl}\Lambda_{liK}^n\omega_0^K - \delta_i^K H_J\omega_0^J;$$
$$\bar{\omega}_\alpha^n = -\Lambda_{\beta\alpha}^n\omega_0^\beta;\ \bar{\omega}_p^\alpha = -\Lambda_{qp}^n\Lambda_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^q;$$
$$\bar{\omega}_i^\alpha = -V_{ji}^n\Lambda_n^{\alpha\beta}\omega_\beta^j;$$
$$\bar{\omega}_\alpha^p = -\Lambda_n^{pq}\Lambda_{\beta\alpha}^n\omega_q^\beta;$$
$$\bar{\omega}_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\beta - \Lambda_n^{\beta\gamma}\Lambda_{\gamma\alpha K}^n\omega_0^K - \delta_\alpha^\beta H_J\omega_0^J;$$
$$\bar{\omega}_\alpha^i = -V_n^{ij}\Lambda_{\beta\alpha}^n\omega_j^\beta;\ \bar{\omega}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\omega_q^0;\ \bar{\omega}_n^j = -V_n^{ji}\omega_i^0;$$
$$\bar{\omega}_n^\beta = -\Lambda_n^{\beta\alpha}\omega_\alpha^0.$$

Формы $\bar{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{J}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{J}}\}$, т.е. $d\tau_{\bar{J}} = \bar{\omega}_{\bar{J}}^{\bar{K}}\tau_{\bar{K}}$, где

$$\tau_0 = \rho[A_0, A_p, A_i, A_\alpha], \quad \tau_n = \rho[A_n, A_p, A_i, A_\alpha],$$
$$\tau_p = \rho\sum_q \Lambda_{qp}^n[A_0, A_1, \dots, A_{q-1}, A_n, A_{q+1}, \dots, A_r, A_i, A_\alpha],$$

$$\tau_i = \rho \sum_j \Lambda^n_{ji} \, [A_0, A_p, A_{r+1}, ..., A_{j-1}, A_n, A_{j+1}, ..., A_m, A_\alpha], \quad (7)$$

$$\tau_\alpha = \rho \sum_\beta \Lambda^n_{\beta\alpha} [A_0, A_p, A_i, A_{m+1}, \ldots, A_{\beta-1}, A_n, A_{\beta+1}, \ldots, A_{n-1}],$$

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda \cdot V \cdot E}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{S}} .$$

С использованием формул (1) - (6), аналогично работам [3; 4] нами доказано, что преобразование $J : \omega^{\bar{J}}_{\bar{K}} \to \bar{\omega}^{\bar{J}}_{\bar{K}}$ структурных форм проективного пространства по закону (6) является инволютивным, т.е. $J = J^{-1}$. В силу этого можно ввести в рассмотрение двойственный образ данному *WH*-распределению — вырожденное распределение $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$, уравнения которого имеют аналогичный вид (1) (здесь не выписываются соответствующие замыкания):

$$\bar{\omega}^n_i = \bar{\Lambda}^n_{i\hat{\beta}} \bar{\omega}^{\hat{\beta}}_0 , \ \bar{\omega}^n_\alpha = \bar{\Lambda}^n_{\alpha\hat{\beta}} \bar{\omega}^{\hat{\beta}}_0 , \ \bar{\omega}^\alpha_i = \bar{\Lambda}^\alpha_{i\hat{\beta}} \bar{\omega}^{\hat{\beta}}_0 ,$$

$$\bar{\omega}^n_p = \bar{\Lambda}^n_{p\hat{A}} \bar{\omega}^{\hat{A}}_0 , \ \bar{\omega}^p_i = \bar{\Lambda}^p_{i\hat{A}} \bar{\omega}^{\hat{A}}_0 , \ \bar{\omega}^\alpha_p = \bar{\Lambda}^\alpha_{p\hat{A}} \bar{\omega}^{\hat{A}}_0 , \quad (8)$$

$$\bar{\omega}^p_\alpha = \bar{\Lambda}^p_{\alpha\hat{A}} \bar{\omega}^{\hat{A}}_0 , \ \bar{\omega}^i_p = \bar{\Lambda}^i_{pK} \bar{\omega}^K_0 , \ \bar{\omega}^i_\alpha = \bar{\Lambda}^i_{\alpha K} \bar{\omega}^K_0 .$$

Таким образом, имеет место

Теорема 1. *WH-распределение проективного пространства* P_n *во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует:*

1) проективное пространство $\overline{P}_n$*, двойственное исходному проективному пространству* P_n *относительно инволютивного преобразования J форм* $\overline{\omega}_{\overline{K}}^{\overline{J}}$ *по закону (6);*

2) вырожденное распределение $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$*, двойственное исходному, причем его дифференциальные уравнения в тангенциальном репере (7) имеют вид (8), аналогичный уравнениям (1) WH-распределения проективного пространства* P_n.

В разных дифференциальных окрестностях можно построить поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов двойственного многообразия $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$, используя те же формулы охватов (соответствующие объекты пишутся с черточкой сверху). Построенные поля геометрических объектов определяют внутреннюю геометрию многообразия $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$, двойственную геометрии исходного распределения $WH \subset P_n$.

Двойственная геометрия имеет место и на оснащенном распределении $WH \subset P_n$. Действительно, всякая нормализация *WH*-распределения полями квазитензоров $(\nu_n^p, \nu_p^0; \nu_n^i, \nu_i^0; \nu_n^\alpha, \nu_\alpha^0)$ индуцирует двойственную ей нормализацию $(\overline{\nu}_n^p, \overline{\nu}_p^0; \overline{\nu}_n^i, \overline{\nu}_i^0; \overline{\nu}_n^\alpha, \overline{\nu}_\alpha^0)$, при этом оснащающие объекты связаны соотношениями:

$$\begin{gathered}\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq}\nu_q^0, \quad \overline{\nu}_p^0 = \Lambda_{qp}^n\nu_n^q, \quad \overline{\nu}_n^i = -V_n^{ik}\nu_k^0, \quad \overline{\nu}_i^0 = V_{ki}^n\nu_n^k, \\ \overline{\nu}_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^0, \quad \overline{\nu}_\alpha^0 = \Lambda_{\beta\alpha}^n\nu_n^\beta.\end{gathered} \tag{9}$$

Отсюда непосредственно следует

Теорема 2. *Нормализация одного из вырожденных распределений* $WH \subset P_n$ *или* $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$ *равносильна нормализации другого, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями (9).*

Список литературы

1. *Максакова Т.Ю.* Вырожденные трехсоставные распределения// Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. №36. С. 59—64.

2. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос: Учебное пособие. — Калининград, 1992. — 80 с.

3. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. 2-е изд. — Чебоксары, 1994. — 290 с.

4. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. — Из-во С.-Петербургского ун-та, 1992. — 172 с.

T. Maksakova

DUAL IMAGE OF WH-DISTRIBUTION

We proceed the research of the degenerated three-composite distributions of projective space which are called as WH-distributions [1]. The dual image of WH-distribution concerning involute transformation (6) of structural forms of projective space P_n is constructed. The dual theory takes place also for the equipped WH-distribution. It is shown, that the normalization of one of the degenerated distributions $WH \subset P_n$ or $\overline{WH} \subset \overline{P_n}$ is equivalent to normalization another, thus the components of fields of equipping objects are connected by the relations (9).