УДК 514.76

Н. А. Елисеева[1], *Ю. И. Попов*[2]
[1] *Калининградский государственный технический университет, Россия*
[2] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-3

Оснащенное гиперполосное распределение аффинного пространства

В аффинном пространстве рассматривается гиперполосное распределение, которое в каждой точке базисной поверхности оснащено касательной плоскостью и сопряженной касательной прямой. Приведены задание изучаемого гиперполосного распределения в аффинном пространстве относительно репера 1-го порядка и теорема существования. Построены поля аффинных нормалей 1-го рода Бляшке и Трансона и найдены условия их совпадения. Приведено задание нормальной аффинной и нормальной центроаффинной связностей на изучаемом оснащенном гиперполосном распределении.

Ключевые слова: гиперполоса, регулярная гиперполоса, гиперполосное распределение, аффинные нормали, нормальная аффинная связность

§ 1. Задание оснащенного гиперполосного распределения SH_m аффинного пространства A_n

В работе используется следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1, n}; \quad p, q, t, s, r = 2, m; \quad \alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1, n-1};$$

$$i, j, k, l = \overline{1, m}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{m+1, n}.$$

Поступила в редакцию 07.05.2024 г.

Применяются метод внешних дифференциальных форм Э. Картана [1; 11; 15] и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева [4; 5].

Пусть $R = \{M, \bar{e}_J\}$ — подвижной репер аффинного пространства A_n, где

$$d\bar{A} = \omega^J \bar{e}_J, \;\; d\bar{e}_J = \omega_J^K \bar{e}_K, \quad (1.1)$$

а инвариантные формы ω^J, ω_J^K аффинной группы преобразований удовлетворяют уравнениям

$$d\omega^J = \omega^L \wedge \omega_L^J, \;\; d\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K. \quad (1.2)$$

В аффинном пространстве A_n рассмотрим гиперполосное распределение [4; 6; 8; 10; 13], в каждой точке $A \overset{\text{def}}{=} M$ базисной поверхности V_m которого задана касательная плоскость $\Lambda_{m-1}(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta(A)$ и сопряженная ей касательная прямая $L_1(A) \overset{\text{def}}{=} \Delta^*(A)$.

Гиперполосное распределение в A_n, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), назовем кратко распределением SH_m.

Совместим вершину M репера R с текущей точкой A базисной поверхности $V_m \subset A_n$. Векторы $\{\bar{e}_p\}$ поместим в касательную плоскость $\Delta(A)$, а вектор $\bar{e}_1$ выберем параллельно прямой $L_1(A)$. Векторы $\{\bar{e}_\alpha\}$ поместим в характеристику $X_{n-m-1}(A)$ распределения SH_m, а вектор $\bar{e}_n$ пусть занимает произвольное положение, образуя с векторами $\{\bar{e}_p,\ \bar{e}_\alpha,\ \bar{e}_1\}$ репер $\{A,\ \bar{e}_J\}$ пространства A_n. Канонизированный таким образом репер $\{A,\ \bar{e}_J\}$ является репером 1-го порядка R^1, относительно которого распределение SH_m задается уравнениями

$$\omega^n = 0, \omega^\alpha = 0, \omega_\alpha^n = 0, \quad (1.3)$$

$$\omega_p^n = b_{pq}^n \omega^q, \omega_1^n = b_{11}^n \omega^1, \omega_p^\alpha = b_{pq}^\alpha \omega^q, \omega_1^\alpha = b_{11}^\alpha \omega^1, \quad (1.4)$$

$$\omega_1^p = \lambda_{1i}^p \omega^i, \omega_p^1 = \lambda_{pi}^1 \omega^i, \omega_\alpha^1 = \lambda_{\alpha i}^1 \omega^i, \omega_\alpha^p = \lambda_{\alpha i}^p \omega^i. \quad (1.5)$$

Продолжая уравнения (1.4, 1.5), получим соответственно

$$\nabla b_{pq}^n = b_{pqi}^n \omega^i, \nabla b_{11}^n = b_{11i}^n \omega^i, \quad (1.6)$$

$$\nabla b^{\alpha}_{pq} + b^{n}_{pq}\omega^{\alpha}_{n} = b^{\alpha}_{pqi}\omega^{i}, \nabla b^{\alpha}_{11} + b^{n}_{11}\omega^{\alpha}_{n} = b^{\alpha}_{11i}\omega^{i}, \quad (1.7)$$

$$\nabla \lambda^{1}_{pi} + b^{n}_{pi}\omega^{1}_{n} = \lambda^{1}_{pij}\omega^{j}, \nabla \lambda^{p}_{1i} + b^{n}_{1i}\omega^{p}_{n} = \lambda^{p}_{1ij}\omega^{j}, \quad (1.8)$$

$$\nabla \lambda^{1}_{\alpha i} = \lambda^{1}_{\alpha ij}\omega^{j}, \ \ \nabla \lambda^{p}_{\alpha i} = \lambda^{p}_{\alpha ij}\omega^{j}.$$

Замыкание уравнений (1.3) приводит к соотношениям

$$b^{n}_{[pq]} = 0, \ b^{\alpha}_{[pq]} = 0, \ \lambda^{t}_{\alpha[p}b^{n}_{q]t} = 0, \quad (1.9)$$

$$\lambda^{p}_{\alpha 1}b^{n}_{pq} = \lambda^{1}_{\alpha q}b^{n}_{11} \ \Leftrightarrow \ \lambda^{1}_{\alpha q} = \lambda^{p}_{\alpha 1}b^{11}_{n}b^{n}_{pq}. \quad (1.10)$$

Мы рассматриваем регулярные распределения SH_m, для которых характеристика $X_{n-m-1}(A)$ и касательная плоскость $T_m(A)$ базисной поверхности V_m в каждой точке $A \in V_m$ находятся в общем положении:

$$X_{n-m-1}(A) \cap T_m(A) = A, [X_{n-m-1}(A), T_m(A)] = \tau(A).$$

Система функций b^{n}_{ij} образует невырожденный тензор 1-го порядка — главный фундаментальный тензор распределения SH_m [14], который распадается на два невырожденных симметрических тензора 1-го порядка b^{n}_{pq}, b^{n}_{11}:

$$[b^{n}_{ij}] = \begin{bmatrix} b^{n}_{pq} & 0 \\ 0 & b^{n}_{11} \end{bmatrix}.$$

Тензор 1-го порядка b^{n}_{pq} назовем главным фундаментальным тензором распределения SH_m, ассоциированным с расслоением плоскостей $\Delta(A)$ (Δ-подрасслоением), а тензор b^{n}_{11} — главным фундаментальным тензором распределения SH_m, ассоциированным с расслоением плоскостей $\Delta^*(A)$ (Δ^*-подрасслоением).

Для невырожденных тензоров b^{n}_{pq} и b^{n}_{11} введем обратные им тензоры b^{pq}_{n} и b^{11}_{n}, компоненты которых удовлетворяют условиям:

$$b^{n}_{pq}b^{qt}_{n} = \delta^{t}_{p}, \ \nabla b^{pq}_{n} = -b^{tp}_{n}b^{sq}_{n}b^{n}_{tsi}\omega^{i} = b^{pq}_{ni}\omega^{i}, \quad (1.11)$$

$$b^{n}_{11}b^{11}_{n} = 1, \ \nabla b^{11}_{n} = b^{11}_{ni}\omega^{i}. \quad (1.12)$$

Известно [14], что необходимым и достаточным условием сопряженности плоскости $\Delta(A)$ и прямой $\Delta^*(A)$ является обращение в нуль тензора $b^{\hat{\alpha}}_{1p}$:

$$b^{\hat{\alpha}}_{1p} = b^{\hat{\alpha}}_{p1} = 0. \tag{1.13}$$

Итак, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Регулярное распределение $SH_m \subset A_n$, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), в репере R^1 первого порядка задается дифференциальными уравнениями (1.3—1.8) и соотношениями (1.11—1.13).*

Также имеет место теорема 2.

Теорема 2. *Распределение SH_m аффинного пространства, несущее сопряженную систему (Δ, Δ^*), существует и определено с произволом $2(m-1)+m(n-m-1)$ функций m аргументов.*

§ 2. Аффинные нормали гиперполосного распределения SH_m

Главный фундаментальный тензор b^n_{ij} гиперполосного распределения SH_m удовлетворяет уравнениям [7]:

$$\nabla b^n_{ij} = b^n_{ijk}\omega^k. \tag{2.1}$$

Замыкание уравнений (2.1) приводит к условиям

$$\nabla b^n_{ijk} = b^n_{(ij} b^n_{k)l}\omega^l_n + b^n_{ijkl}\omega^l. \tag{2.2}$$

Используя уравнения (2.2), найдем дифференциальные уравнения для функций b^n_{pqi}, b^n_{11i}, придавая индексам i, j, k значения $p, q, t, 1$. В результате в силу соотношений (1.3—1.5, 1.13) получим:

$$\begin{gathered}
\nabla b^n_{pqt} = b^n_{s(p} b^n_{qt)}\omega^s_n + b^n_{1(pq}\lambda^1_{t)i}\omega^i + b^n_{pqti}\omega^i,\\
\nabla b^n_{111} = b^n_{1(1} b^n_{11)}\omega^1_n + b^n_{p(11}\lambda^p_{1)i}\omega^i + b^n_{111i}\omega^i, \qquad (2.3)\\
\nabla b^n_{pq1} = b^n_{pq} b^n_{11}\omega^1_n + (b^n_{pqt}\lambda^t_{1i} + b^n_{p11}\lambda^1_{qi} + b^n_{q11}\lambda^1_{pi} + b^n_{pq1i})\omega^i,\\
\nabla b^n_{11p} = b^n_{11} b^n_{pq}\omega^q_n + (b^n_{111}\lambda^1_{pi} + 2b^n_{1pt}\lambda^t_{1i} + b^n_{11pi})\omega^i.
\end{gathered}$$

Замечание. Уравнения (2.3) можно получить, непосредственно дифференцируя (1.6) и учитывая (1.13, 1.3—1.5, 1.9, 1.10).

Введем в рассмотрение функции 1-го порядка

$$\lambda_n^\alpha = \frac{1}{m} b_{ij}^\alpha b_n^{ij} \tag{2.4}$$

и функции 2-го порядка

$$\begin{gathered} B_n^i = -\frac{1}{m+2} b_n^{kj} b_{kjl}^n b_n^{li}, \\ A_n^p = -b_n^{11} b_{11q}^n b_n^{qp},\ A_n^1 = -\frac{1}{m-1} b_n^{qp} b_{qp1}^n b_n^{11}, \\ T_n^1 = -\frac{1}{3} b_n^{11} b_{111}^n b_n^{11},\ T_n^p = -\frac{1}{m+1} b_n^{st} b_{stq}^n b_n^{qp}. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Замечание. Здесь порядок функций определяем старшим порядком компонент, из которых они построены.

С учетом уравнений (1.6, 1.7, 1.11, 1.12, 2.1—2.3) убеждаемся, что функции (2.4, 2.5) являются квазитензорами:

$$\begin{gathered} \nabla\lambda_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i,\ \nabla B_n^i + \omega_n^i = B_{nj}^i \omega^j, \\ \nabla A_n^p + \omega_n^p = A_{ni}^p \omega^i,\ \ \nabla A_n^1 + \omega_n^1 = A_{ni}^1 \omega^i, \\ \nabla T_n^1 + \omega_n^1 = T_{nj}^1 \omega^j,\ \nabla T_n^p + \omega_n^p = T_{ni}^p \omega^i. \end{gathered} \tag{2.6}$$

Прежде всего отметим, что квазитензоры $\{B_n^i, \lambda_n^\alpha\}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка задают нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha,\ \bar{B}_n]$ гиперполосного распределения SH_m [7], где

$$\bar{B}_n = \bar{e}_n + B_n^i \bar{e}_i + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ не зависит от подрасслоений Δ и Δ^*, а определяется гиперполосным распределением SH_m.

Прямую $B_1 = [A,\ \bar{B}_n]$ назовем *прямой Бляшке* гиперполосного распределения SH_m. Таким образом, нормаль Бляшке $B_{n-m}(A) = [A,\ \bar{B}_n, X_{n-m-1}(A)\ ]$ в каждой точке $A \in V_m$ натянута на характеристику $X_{n-m-1}(A)$ гиперполосного распределения SH_m и прямую Бляшке B_1.

Для регулярных гиперполос аффинные нормали всех плоских сечений гиперповерхности V_{n-1} m-мерными плоскостями, проходящими через плоскость $\Delta(A)$, лежат в $(n-m+1)$-мерной плоскости

$$T_{n-m+1}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_1, \bar{e}_n + T_n^p \bar{e}_p], \tag{2.7}$$

то есть в нормали Трансона Δ-подрасслоения [3].

Аналогично нормаль Трансона Δ^*-подрасслоения есть $(n-1)$-мерная плоскость (гиперплоскость)

$$T_{n-1}(A) = \left[A, \bar{e}_p, \bar{e}_\alpha, \bar{e}_n + T_n^1 \bar{e}_1\right]. \tag{2.8}$$

В формулах (2.7, 2.8) квазитензоры $\{T_n^i\}$ и $\{T_n^p\}$ имеют строение (2.5).

Определение. *Нормалью Трансона гиперполосного распределения SH_m* в каждой точке $A \in V_m$ назовем $(n-m)$-мерную плоскость $T_{n-m}(A) = T_{n-m+1}(A) \cap T_{n-1}(A)$ — плоскость пересечения нормалей Трансона Δ-подрасслоения и Δ^*-подрасслоения.

Определение. Прямую $T_1(A) = [A,\ \bar{T}_n]$, где

$$\bar{T}_n = \bar{e}_n + T_n^p \bar{e}_p + T_n^1 \bar{e}_1 + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha,$$

назовем *прямой Трансона распределения SH_m в точке A*.

Нормаль Трансона 1-го рода распределения SH_m в каждой точке $A \in V_m$ имеет вид $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{T}_n]$.

Введем в рассмотрение прямую $[A,\ \bar{A}_n]$, где

$$\bar{A}_n = \bar{e}_n + A_n^p \bar{e}_p + A_n^1 \bar{e}_1 + \lambda_n^\alpha \bar{e}_\alpha.$$

Учитывая (1.1, 2.6), убеждаемся, что $\delta \bar{A}_n = \pi_n^n \bar{A}_n$. Таким образом, прямая $A_1 = [A,\ \bar{A}_n]$ есть инвариантная прямая, внутренним образом присоединенная к распределению SH_m во второй дифференциальной окрестности. Прямую A_1 назовем аффинной прямой Δ-подрасслоения (или Δ^*-подрасслоения). Соответственно, плоскость $A_{n-m+1}(A) = [A, \bar{e}_1, \bar{e}_\alpha, \bar{A}_n]$ назовем *аффинной нормалью* Δ-подрасслоения, а плоскость $A_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, \bar{A}_n]$ — аффинной нормалью гиперполосного распределения SH_m.

Из формул (2.5) получаем соотношения

$$B_n^1 = T_n^1 + \frac{m-1}{m+2} A_n^1 - T_n^1, \tag{2.9}$$

$$B_n^p = A_n^p + \frac{m-1}{m+2} \left(T_n^p - A_n^p \right). \tag{2.10}$$

Из (2.9, 2.10) вытекает, что компоненты квазитензора $\{B_n^i\} = \{B_n^1, B_n^p\}$ являются линейными комбинациями компонент квазитензоров $\{A_n^i\}$ и $\{T_n^i\}$.

В результате приходим к следующим предложениям.

Теорема 3. *Аффинные нормали 1-го рода Δ^*-подрасслоения гиперполосного распределения SH_m образуют однопараметрический пучок гиперплоскосктей, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^1(\varepsilon) = A_n^1 + \varepsilon (T_n^1 - A_n^1), \tag{2.11}$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-1}(A)$ высекается из пучка (2.11) при $\varepsilon = \frac{3}{m+2}$.

Теорема 4. *Нормали 1-го рода $N_{n-m+1}(A)$ Δ-подрасслоения образуют однопараметрический пучок, определяемый пучком квазитензоров*

$$N_n^p(\gamma) = T_n^p + \gamma \left(A_n^p - T_n^p \right),$$

причем нормаль Бляшке $B_{n-m+1}(A)$ Δ-подрасслоения соответствует параметру $\gamma = \frac{1}{m+2}$.

Отметим еще одну особенность тройки нормалей 1-го рода Бляшке, Трансона и аффинной нормали A_{n-m}.

Теорема 5. *Нормали 1-го рода Бляшке $B_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, B_1]$, Трансона $T_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, T_1]$, аффинная нормаль $A_{n-m}(A) = [A, \bar{e}_\alpha, A_1]$ гиперполосного распределения SH_m принадлежат одному однопараметрическому пучку:*

$$N_n^i(\eta) = T_n^i + \eta \left(A_n^i - T_n^i \right). \tag{2.12}$$

Если нормаль Трансона $T_{n-1}(A)$ совпадает с аффинной нормалью гиперполосного распределения SH_m, то, как следует из формул (2.9, 2.10), нормаль Бляшке $B_{n-m}(A)$ тоже совпадает с нормалью Трансона, то есть все три нормали совпадают.

Аналогично при совпадении любых двух нормалей гиперполосного распределения SH_m из указанных трех (A_{n-m}, B_{n-m}, T_{n-m}) все три нормали совпадают.

Определение. Гиперполосное распределение SH_m назовем *коинцидентным* [9], если пучок нормалей (2.12) вырождается в одну нормаль.

В результате приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Гиперполосное распределение SH_m коинцидентно тогда и только тогда, когда любые две его нормали из трех $A_{n-m}(A), B_{n-m}(A), T_{n-m}(A)$ совпадают.*

§ 3. Задание нормальной аффинной связности на оснащенном регулярном распределении SH_m

1. Адаптируем репер полю нормалей $N(A)$ 1-го рода гиперполосного распределения SH_m, выбирая вектор $\bar{e}_n \parallel N(A)$. В этом случае

$$\omega_n^1 = \lambda_{ni}^1 \omega^i, \ \omega_n^p = \lambda_{ni}^p \omega^i, \ \omega_n^\alpha = \lambda_{ni}^\alpha \omega^i, \tag{3.1}$$

а поле нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A)$ определяется уравнениями

$$\nabla \lambda_{ni}^1 = \lambda_{nij}^1 \omega^j, \ \nabla \lambda_{ni}^\alpha = \lambda_{nij}^\alpha \omega^j. \tag{3.2}$$

Таким образом, уравнения (1.3—1.8, 3.1, 3.2, 1.9, 1.10, 1.13) задают оснащенное полем нормалей 1-го рода $N_{n-m}(A)$ гиперполосное распределение $SH_m \subset A_n$.

При фиксации точки $A \overset{\text{def}}{=} x$ базисной поверхности $V_m \subset SH_m$ нормаль 1-го рода N_x гиперполосного распределения SH_m в точке $x \in V_m$ и касательная плоскость T_x базисной поверхности V_m остаются неподвижными. Следовательно, на базисной поверхности V_m возникает нормальное $N(V_m)$ и касательное $T(V_m)$ расслоения [12].

Структурные уравнения касательного расслоения $T(V_m)$ в силу формул (1.2, 1.3—1.10, 1.13, 3.1) имеют следующий вид:

$$d\omega^i = \omega^k \wedge \omega_k^i,\ d\omega_p^q = \omega_p^s \wedge \omega_s^q + \Omega_p^q,\ d\omega_1^1 = \Omega_1^1,$$
$$d\omega_1^p = \omega_1^i \wedge \omega_i^p + \Omega_1^p,\ d\omega_p^1 = \omega_p^i \wedge \omega_i^1 + \Omega_p^1, \tag{3.3}$$

где

$$\Omega_p^q = \omega_p^1 \wedge \omega_1^q + \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^q + \omega_p^n \wedge \omega_n^q = (\lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q +$$
$$+ b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q + b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{pij}^q \omega^i \wedge \omega^j,$$
$$\Omega_1^1 = \omega_1^p \wedge \omega_p^1 + \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_1^n \wedge \omega_n^1 = (\lambda_{1[i}^p \lambda_{|p|j]}^1 +$$
$$+ b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{1ij}^1 \omega^i \wedge \omega^j,$$
$$\Omega_1^p = \omega_1^\alpha \wedge \omega_\alpha^p + \omega_1^n \wedge \omega_n^p = (b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p +$$
$$+ b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{1ij}^p \omega^i \wedge \omega^j, \tag{3.4}$$
$$\Omega_p^1 = \omega_p^\alpha \wedge \omega_\alpha^1 + \omega_p^n \wedge \omega_n^1 = (b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 +$$
$$+ b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1)\omega^i \wedge \omega^j = \frac{1}{2} R_{pij}^1 \omega^i \wedge \omega^j;$$

$$R_{pij}^q = 2\left(\lambda_{p[i}^1 \lambda_{|1|j]}^q + b_{pt}^\alpha \delta_{[i}^t \lambda_{|\alpha|j]}^q + b_{pt}^n \delta_{[i}^t \lambda_{|n|j]}^q\right),$$
$$R_{1ij}^1 = 2\left(\lambda_{1[i}^p \lambda_{|p|j]}^1 + b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^1\right),$$
$$R_{1ij}^p = 2\left(b_{11}^\alpha \delta_{[i}^1 \lambda_{|\alpha|j]}^p + b_{11}^n \delta_{[i}^1 \lambda_{|n|j]}^p\right), \tag{3.5}$$
$$R_{pij}^1 = 2\left(b_{pq}^\alpha \delta_{[i}^q \lambda_{|\alpha|j]}^1 + b_{pq}^n \delta_{[i}^q \lambda_{|n|j]}^1\right).$$

Следуя работе [12], приходим к выводу, что в касательном расслоении $T(V_m)$ возникает аффинная связность γ без кручения с формами связности $\{\omega^i, \omega_j^i\}$ (3.3), которую, следуя работе [7], назовем внутренней (касательной) аффинной связностью оснащенного гиперполосного распределения SH_m.

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное гиперполосное распределение SH_m индуцирует* *внутреннюю аффинную связность γ в касательном расслоении $T(V_m)$ с формами связности $\{\omega^i, \omega^i_j\}$ (3.3) и 2-формами кривизны (3.4). Компоненты тензора $R^l_{kij} = \{R^q_{pij}, R^1_{1ij}, R^p_{1ij}, R^1_{pij}\}$ связности γ имеют строение (3.5).*

2. Структурные уравнения нормального расслоения $N(V_m)$ [12] с учетом уравнений (1.2, 1.3—1.10, 1.13, 3.1) можно представить в виде:

$$d\omega^\beta_\alpha = \omega^\gamma_\alpha \wedge \omega^\beta_\gamma + \Omega^\beta_\alpha \text{ (a)}, \quad d\omega^n_\alpha = 0,$$

$$d\omega^\alpha_n = \omega^\beta_n \wedge \omega^\alpha_\beta + \omega^n_n \wedge \omega^\alpha_n + \Omega^\alpha_n, \; d\omega^n_n = \Omega^n_n, \qquad (3.6)$$

где

$$\Omega^\beta_\alpha = \omega^i_\alpha \wedge \omega^\beta_i = \lambda^i_{\alpha[k} b^\beta_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^\beta_{\alpha kl} \omega^k \wedge \omega^l \text{ (a)},$$

$$\Omega^\alpha_n = \omega^i_n \wedge \omega^\alpha_i = \lambda^i_{n[k} b^\alpha_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^\alpha_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l,$$

$$\Omega^n_\alpha = \lambda^i_{\alpha[k} b^n_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = 0, \qquad (3.7)$$

$$\Omega^n_n = \omega^i_n \wedge \omega^n_i = \lambda^i_{n[k} b^n_{l]i} \omega^k \wedge \omega^l = \frac{1}{2} R^n_{nkl} \omega^k \wedge \omega^l;$$

$$R^\beta_{\alpha kl} = 2\lambda^i_{\alpha[k} b^\beta_{l]i} \text{ (a)}, \quad R^\alpha_{nkl} = 2\lambda^i_{n[k} b^\alpha_{l]i}, \qquad (3.8)$$

$$R^n_{\alpha kl} = 2\lambda^i_{\alpha[k} b^n_{l]i}, R^n_{nkl} = 2\lambda^i_{n[k} b^n_{l]i}.$$

Согласно работе [12], получаем, что в нормальном расслоении $N(V_m)$ возникает центроаффинная связность $\gamma^\perp$, которую назовем нормальной центроаффинной связностью оснащенного гиперполосного расслоения SH_m.

Теорема 8. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка оснащенное гиперполосное распределение SH_m индуцирует в расслоении $N(V_m)$ нормалей 1-го рода нормальную центроаффинную связность $\gamma^\perp$ с формами связности $\{\omega^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}\}$ и 2-формами кривизны (3.7), компоненты тензора кривизны $R^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}kl}$ которой имеют строение (3.8).*

Поскольку в каждой точке $x \in V_m$ определена характеристика X_{n-m-1} гиперполосного распределения SH_m [7; 14], причем $X_{n-m-1}(x) \subset N_x$, то на базисной поверхности V_m определено расслоение характеристик $X(V_m)$, которое представляет собой нормальное $(n-m-1)$-мерное подрасслоение $N_{n-m-1}(V_m)$ [12].

Структурные уравнения расслоения $X(V_m)$ определяются уравнениями (3.6, а), 2-форма Ω_α^β определена уравнением (3.7, а), а тензор кривизны $R_{\alpha kl}^\beta$ имеет вид (3.8, а). Связность в расслоении характеристик $X(V_m)$ назовем нормальной центроаффинной характеристической связностью $\eta^\perp$ оснащенного гиперполосного распределения SH_m.

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по векторному и тензорному анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.

3. *Елисеева Н.А., Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение, оснащенное полем сопряженных плоскостей // ДГМФ. 2023. №54 (1). С. 78—91.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Моск. матем. об-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Тр. Геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 4. С. 7—70.

6. *Попов Ю.И.* Гиперполосное распределение аффинного пространства // Итоги науки и техн. Соврем. матем. и ее прилож. Темат. обзоры. 2021. Т. 203. С. 84—99.

7. *Попов Ю.И.* Гиперполосные распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

8. *Попов Ю.И.* Введение в теорию регулярного гиперполосного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. №10. С. 49—56.

9. *Попов Ю.И.* Специальные классы гиперполосного распределения аффинного пространства. Калининград, 2021.

10. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т. 7. С. 117—151.

11. *Фиников С.П.* Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии. М. ; Л., 1948.

12. *Чакмазян А.В*. Нормальная связность в геометрии подмногообразий. Ереван, 1990.

13. *An-Min L., Udo S., Guosong Zh., Zejun H.* Global Affine. Differential Geometry of Hypersurfaces. De Gruyter, 2015. (Expositions in Mathematics ; vol. 11).

14. *Akivis M.A.* Selected Papers. Heldermann, 2008.

15. *Ivey Th.A., Landsberg J.M.* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems, 2003. (Graduate Studies in Mathematics ; vol. 61).

Для цитирования: *Елисеева Н.А., Попов Ю.И.* Оснащенное гиперполосное распределение аффинного пространства // ДГМФ. 2024. №55 (1). С. 20—33. https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-3.

MSC 2010: 58A05, 53A20

N.A. Eliseeva[1], *Yu.I. Popov*[2]

[1] *Kaliningrad State Technical University,*
1 Sovietsky Prospect, Kaliningrad, 236022, Russia
[2] *Immanuel Kant Baltic Federal University,*
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
[1] ne2705@gmail.com, [2] yurij.popoff2015@yandex.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2024-55-1-3

Framed hyperstrip affine space distribution

Submitted on May 7, 2024

A rigged hyperstrip distribution is a special class of hyperstrips. The study of hyperstrips and their generalizations in spaces with various fundamental groups is of great interest due to numerous applications in

mathematics and physics. A special place is occupied by regular hyperstrips, for which the characteristic planes of families of principal tangent hyperplanes do not contain directions tangent to the base surface of the hyperstrip. In this work, we use E. Cartan's method of external differential forms and the group-theoretic method of G. F. Laptev.

In affine space, a hyperstrip distribution is considered, which at each point of the base surface is equipped with a tangent plane and a conjugate tangent line. The specification of the studied hyperstrip distribution in an affine space with respect to a 1st order reference and an existence theorem are given. The fields of affine normals of the 1st kind for Blaschke and Transon are constructed and the conditions for their coincidence are found. The definition of normal affine connection and normal centroaffine connection on the studied framed hyperstrip distribution is given.

Keywords: hyperstrip, regular hyperstrip, hyperstrip distribution, affine normals, normal affine connection

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.:* Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Vagner, V.V.:* The theory of the field of local hyperstrips. Tr. Semin. Vectorn. Tensorn. Anal., 8, 197—272 (1950).

3. *Eliseeva, N.A., Popov, Yu.I.:* Hyperband distribution equipped with a field of conjugate planes. DGMF, 54 (1), 78—91 (2023).

4. *Laptev, G.F.:* Differential geometry of imbedded manifolds. Group theoretical method of differential geometric investigations. Tr. Mosk. Mat. Obs., 2, 275—382 (1953).

5. *Ostianu, N.M., Ryzhkov, V.V., Shveikin P.I.:* Outline of scientific research by German Fedorovich Laptev. Tr. Geom. Sem., 4, 7—70 (1975).

6. *Popov, Yu.I.:* Hyperband distribution of an affine space. Itogi Nauki i Tekhn. 203, 84—99 (2021).

7. *Popov, Yu.I.:* Hyperband distributions of affine space. Kaliningrad (2021).

8. *Popov, Yu.I.:* Introduction to the theory of a regular hyper-band distribution of an affine space. IKBFU's Vestnik, 10, 49—56 (2013).

9. *Popov, Yu. I.:* Special classes of hyperband distribution of an affine space. Kaliningrad (2021).

10. *Stolyarov, A. V.:* Projective-differential geometry of a regular hyperstrip distribution of *m*-dimensional linear elements. Problems of Geom., 7, 117—151 (1975).

11. *Finikov, S.P.:* Cartan's exterior form method in differential geometry. Moscow (1948).

12. *Chakmazyan, A.V.:* Normal connection in the geometry of submanifolds. Yerevan (1990).

13. *An-Min, L., Simon, U., Guosong, Zh., Zejun, H.:* Global Affine. Differential Geometry of Hypersurfaces, De Gruyter (Expositions in Mathematics, 11) (2015).

14. *Akivis, M.A.:* Selected Papers. Heldermann (2008).

15. *Ivey, Th.A., Landsberg, J.M.:* Cartan for Beginners: Differential Geometry Via Moving Frames and Exterior Differential Systems. Amer. Math. Soc. (Graduate Studies in Mathematics, 61) (2003).

For citation: Eliseeva, N.A., Popov, Yu.I. Framed hyperstrip affine space distribution. DGMF, 55 (1), 20—33 (2024). https://doi.org/10.5922/0321-4796-2024-55-1-3.