УДК 514.75

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НАПРАВЛЕНИЙ ВДОЛЬ ПОВЕРХНОСТИ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

К.В. П о л я к о в а

(*Калининградский государственный университет*)

Рассмотрены специальные оснащения Картана и нормализация Нордена поверхности проективного пространства, а также индуцированные ими связности. Введены проективно-ковариантные дифференциалы оснащающих объектов, которые позволяют описать классические параллельные перенесения касательного и нормального направлений. С помощью обычных ковариантных дифференциалов и их линейной комбинации исследованы сильные (по сравнению с классическими) параллельные перенесения. Изучены параллельные переносы произвольных направлений вдоль поверхности.

1. Связность и оснащения. Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ (I,J,K=1,...,n), деривационные формулы которого имеют вид :

$$dA=\theta A+\omega^I A_I \ , \ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A \ , \tag{1}$$

где θ - некоторая I-форма. Структурные формы $\omega^I, \omega_J^I, \omega_I$ проективной группы GP(n) , действующей в пространстве P_n , удовлетворяют уравнениям Картана (см. напр.[1,с.173]):

$$\begin{cases} d\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I \ , \ d\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J \ , \\ d\omega_J^I=\omega_J^K\wedge\omega_K^I+\omega_J\wedge\omega^I+\delta_J^I\omega_K\wedge\omega^K \ . \end{cases} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим локально m-поверхность X_m (0<m<n) как семейство центрированных касательных плоскостей T_m . Произведем разбиение индексов I=(i,a) : i,j,k=1,...,m ; a,b,c=m+1,...,n .

Осуществим специализацию репера , помещая его вершины A, A_i в касательную плоскость T_m , причем A в ее центр. Из формул (1) следует система дифференциальных уравнений поверхности X_m

$$\omega^a=0 \ , \ \omega_i^a=\Lambda_{ij}^a\omega^j \ . \tag{3}$$

Продолжая эту систему, получим $\nabla\Lambda_{ij}^a\equiv 0$ $(\Lambda_{ij}^a=\Lambda_{ji}^a)$, где символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i , а дифференциальный оператор ∇ действует так :

$$\nabla\Lambda_{ij}^a=d\Lambda_{ij}^a-\Lambda_{ik}^a\omega_j^k-\Lambda_{kj}^a\omega_i^k+\Lambda_{ij}^b\omega_b^a \ . \tag{4}$$

Из структурных уравнений (2) и дифференциальных уравнений (3) следует, что с поверхностью X_m ассоциируется главное расслоение G(X_m), базой которого является поверхность X_m , типовым слоем – подгруппа стационарности $G \subset GP(n)$ центрированной плоскости T_m . Структурные уравнения этого расслоения записаны в работе [2], некоторые результаты которой приводятся в данном пункте.

Введем формы

$$\begin{cases} \tilde{\omega}^i_j = \omega^i_j - \Gamma^i_{jk}\omega^k \ , \ \tilde{\omega}_i = \omega_i - \Gamma_{ij}\omega^j \ , \ \tilde{\omega}^a_b = \omega^a_b - \Gamma^a_{bi}\omega^i \ , \\ \tilde{\omega}^i_a = \omega^i_a - \Gamma^i_{aj}\omega^j \ , \ \tilde{\omega}_a = \omega_a - \Gamma_{ai}\omega^i \ . \end{cases} \qquad (5)$$

Дифференцируя их внешним образом и применяя теорему Картана-Лаптева [3,с.63,83], получим систему сравнений для компонент объекта $\Gamma = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai}\}$,задающего фундаментально-групповую связность в расслоении $G(X_m)$:

$$\begin{cases} \nabla\Gamma^i_{jk} + \omega^i_{jk} \equiv 0 \ , \ \nabla\Gamma_{ij} + \Gamma^k_{ij}\omega_k + \omega_{ij} \equiv 0 \ , \ \nabla\Gamma^a_{bi} + \omega^a_{bi} \equiv 0 \ , \\ \nabla\Gamma^i_{aj} + \Gamma^b_{aj}\omega^i_b - \Gamma^i_{kj}\omega^k_a + \omega^i_{aj} \equiv 0 \ , \ \nabla\Gamma_{ai} + \Gamma^j_{ai}\omega_j + \Gamma^b_{ai}\omega_b - \Gamma_{ji}\omega^j_a \equiv 0 \ . \end{cases} \qquad (6)$$

Объект связности Г содержит 4 существенных подобъекта: объект касательной линейной связности $\Gamma_1 = \{\Gamma^i_{jk}\}$, объект коаффинной (центропроективной) связности $\Gamma_2 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$, объект нормальной линейной связности $\Gamma_3 = \{\Gamma^a_{bi}\}$ и объект $\Gamma_4 = \{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$.

Оснащение Картана поверхности X_m состоит в задании поля плоскостей C_{n-m-1} ($C_{n-m-1} \cap T_m = \varnothing$), определенных базисными точками $B_a = A_a + \lambda^i_a A_i + \lambda_a A$. Коэффициенты λ^i_a, λ_a удовлетворяют следующим уравнениям, обеспечивающим инвариантность плоскости C_{n-m-1} при фиксации образующего элемента T_m поверхности X_m :

$$\nabla\lambda^i_a + \omega^i_a = \lambda^i_{aj}\omega^j \ , \ \nabla\lambda_a + \lambda^i_a\omega_i + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i \ . \qquad (7)$$

Продолжая уравнения (7) , получим

$$\nabla\lambda^i_{aj} - \lambda^i_b\omega^b_{aj} + \lambda^k_a\omega^i_{kj} + \omega^i_{aj} \equiv 0 \ , \ \nabla\lambda_{ai} - \lambda_b\omega^b_{ai} + \lambda^j_{ai}\omega_j + \lambda^j_a\omega_{ji} \equiv 0 \ .$$

Объекты связностей Γ_2 , Γ_3 , оснащающий по Картану квазитензор $\{\lambda^i_a, \lambda_a\}$ и его продолжения, охватывают остальные компоненты $\Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai}$ объекта Г по формулам :

$$\Gamma^i_{aj} = \lambda^i_{aj} + \lambda^i_b\Gamma^b_{aj} - \lambda^k_a\Gamma^i_{kj} \ , \ \Gamma_{ai} = \lambda_{ai} + \lambda_b\Gamma^b_{ai} - \Gamma_{ji}\lambda^j_a \ . \qquad (8)$$

Возьмем специальное поле плоскостей Картана

$$\lambda^i_{aj} = \lambda^k_a\Lambda^b_{jk}\lambda^i_b - \delta^i_j\lambda_a \ , \ \lambda_{ai} = \lambda_b\Lambda^b_{ij}\lambda^j_a \ . \qquad (9)$$

Нормализация Нордена [4,с.197] поверхности X_m состоит в задании на ней поля двух плоскостей , называемых нормалями . Нормаль 1-го рода N_{n-m} ($N_{n-m} \cap T_m = A$), натянутую на плоскость Картана и точку А, определим системой линейных уравнений $x^i - \lambda^i_a x^a = 0$, где функции λ^i_a удовлетворяют первой группе уравнений системы (7).

Нормаль 2-го рода N_{m-1} ($A \notin N_{m-1} \subset T_m$) зададим совокупностью базисных точек $B_i = A_i + \lambda_i A$, причем $\nabla\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j$. Продолжая эти уравнения, получим $\nabla\lambda_{ij} - \lambda_k\omega^k_{ij} + \omega_{ij} \equiv 0$. Пфаффовы производные λ_{ij} квазитензора λ_i выразим в виде $\lambda_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k + \lambda_i\lambda_j$, что соответствует специальному полю нормалей 2-го рода на поверхности X_m , оснащенной по Картану. Тогда тензор Λ^a_{ij} и нормализующие квазитензоры λ^i_a, λ_i охватывают компоненты объекта связности Г по формулам :

$$\Gamma^i_{jk} = \Lambda^a_{jk}\lambda_a - \delta^i_j\lambda_k - \delta^i_k\lambda_j , \; \Gamma_{ij} = \Lambda^a_{ij}\lambda_a - \lambda_i\lambda_j , \; \Gamma^a_{bi} = -\Lambda^a_{ij}\lambda^j_b - \delta^a_b\lambda_i , \quad (10)$$

$$\Gamma^i_{aj} = \delta^i_j(\lambda^k_a\lambda_k - \lambda_a) - \Lambda^b_{jk}\lambda^k_a\lambda^i_b , \; \Gamma_{ai} = \lambda^j_a(\lambda_i\lambda_j - \Lambda^b_{ij}\lambda_b) - \lambda_a\lambda_i . \quad (11)$$

Отметим, что если формулы (9), (10) подставить в соотношения (8), то последние будут совпадать с формулами (11). При фиксации гиперплоскости $L_{n+1} = N_{m-1} + C_{n-m-1}$ разные охваты объекта связности Г совпадают .

2. Перенесение Нордена. Рассмотрим касательную прямую, проходящую через точку А. Она пересекает нормаль 2-го рода N_{m-1} в точке $B = \mu^i B_i = \mu^i\lambda_i A + \mu^i A_i$, причем

$$\nabla\mu^i - \mu^i\omega_1 = \mu^i_j\omega^j . \quad (12)$$

Условие продолжаемости уравнений (12) можно записать в виде $d\omega_1 = \theta_i \wedge \omega^i$. Вводя формы касательной линейной связности Γ_1 в уравнения (12) , получим $\bar{\Delta}\mu^i = \bar{\mu}^i_j\omega^j$, где $\bar{\Delta}\mu^i = d\mu^i + \mu^j\tilde{\omega}^i_j - \mu^i\omega_1$, $\bar{\mu}^i_j = \mu^i_j - \mu^k\Gamma^i_{kj}$, что назовем соответственно проективно-ковариантным дифференциалом и проективно-ковариантными производными объекта μ^i относительно связности Γ_1 . Внешний дифференциал форм $\bar{\Delta}\mu^i$ преобразуется к виду

$$d\bar{\Delta}\mu^i = \bar{\Delta}\mu^j \wedge \tilde{\omega}^i_j - \bar{\Delta}\mu^i \wedge \omega_1 + (\ldots)^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k + \mu^i d\omega_1. \quad (13)$$

Зададим линию $p \subset X_m$ уравнениями $\omega^i = \rho^i \omega$. Тогда в случае $\theta_i = K_{ij}\omega^j$ система $\bar{\Delta}\mu^i = 0$ вполне интегрируема вдоль линии p на поверхности X_m .

Будем говорить, что касательное направление, заданное геометрическим объектом μ^i , переносится параллельно в касательной линейной связности Γ_1 вдоль линии $p \subset X_m$, если вдоль нее проективно-ковариантный дифференциал $\bar{\Delta}\mu^i$ обращается в ноль. В дальнейшем обращение в ноль проективно-ковариантного дифференциала геометрического объекта будет задавать параллельное перенесение в некоторой связности фигуры, определенной этим объектом.

Запишем дифференциал точки В

$dB=(\theta+\omega_1-\lambda_i\,\omega^i)B+\mu^i\,\Lambda^a_{ij}\omega^j B_a+\mu^i(\Lambda^a_{ij}\lambda^k_a\lambda_k-\lambda_i\lambda_j-\Lambda^a_{ij}\lambda_a)\omega^j A+\overline{\Delta}\mu^i B_i$

Уравнения параллельного переноса имеют вид $\overline{\Delta}\mu^i\big|_p=0$.

Теорема 1. Касательная прямая AB, определяемая точкой $B\in N_{m-1}$,переносится параллельно в связности Γ^i_{jk} тогда и только тогда, когда точка B смещается в плоскости $L_{n-m+1}=N_{n-m}+B$.

Замечание 1. Данная теорема является классическим результатом Нордена [4,с.202]. Теорема 1 доказана в работе [5] без использования понятия проективно-ковариантного дифференциала.

3. Перенесение А.В.Чакмазяна. Аналогичным образом рассмотрим параллельный перенос нормальной прямой AC, пересекающей плоскость Картана $C_{n-m-1}\subset N_{n-m}$ в точке $C=\mu^a B_a=\mu^a(A_a+\lambda^i_a A_i+\lambda_a A)$, причем $\nabla\mu^a-\mu^a\omega_2=\mu^a_i\omega^i$. Вводя в последние уравнения формы нормальной связности, получаем проективно-ковариантный дифференциал объекта μ^a в виде :

$$\overline{\Delta}\mu^a=d\mu^a+\mu^b\widetilde{\omega}^a_b-\mu^a\omega_2\ . \tag{14}$$

Внешний дифференциал форм $\overline{\Delta}\mu^a$ преобразуем следующим образом :

$$d\overline{\Delta}\mu^a=\overline{\Delta}\mu^b\wedge\widetilde{\omega}^a_b-\overline{\Delta}\mu^a\wedge\omega_2-\mu^a d\omega_2+(\ldots)^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^j\ . \tag{15}$$

Если $d\omega_2=M_{ij}\omega^i\wedge\omega^j$, то система уравнений $\overline{\Delta}\mu^a\big|_p=0$ вполне интегрируема. Используя выражение (14), найдем дифференциал точки C, принадлежащей нормальному направлению,

$$dC=(\theta+\omega_2-\omega^i\lambda_i)C+\overline{\Delta}\mu^a B_a+\mu^a(\lambda_a\omega^i-\lambda^j_a\lambda^i_b\omega^b_j)B_i+\mu^a(\ldots)_{ai}\omega^i A\ .$$

Уравнения $\overline{\Delta}\mu^a\big|_p=0$ являются условием параллельного переноса прямой AC .

Теорема 2. Нормальная прямая AC, заданная точкой $C\in C_{n-m-1}$,переносится параллельно в нормальной линейной связности Γ^a_{bi} тогда и только тогда, когда точка C смещается в плоскости $L_{m+1}=T_m+C$.

Замечание 2. Конструкция параллельного перенесения Чакмазяна [6,с.67] изложена здесь с некоторой модификацией в менее канонизированном репере. В работе [5] теорема 2 доказана без использования понятия проективно-ковариантного дифференциала.

4. Перенесение направления общего положения. Будем рассматривать прямую AK, пересекающую гиперплоскость L_{n-1} , натянутую на нормаль N_{m-1} и плоскость C_{n-m-1} , в точке $K=\rho^a B_a+\rho^i B_i$, причем $\nabla\rho^a\equiv\rho^a\omega_3$, $\nabla\rho^i\equiv\rho^i\omega_3$. Из уравнений

$$d\overline{\Delta}\rho^a=\overline{\Delta}\rho^b\wedge\widetilde{\omega}^{\mathbf{a}}_{\mathbf{b}}-\overline{\Delta}\rho^a\wedge\omega_{\mathbf{3}}-\rho^a d\omega_3+(\ldots)^a_{ij}\omega^i\wedge\omega^{\mathbf{j}},$$

$$d\overline{\Delta}\rho^i=\overline{\Delta}\rho^j\wedge\widetilde{\omega}^{\mathbf{i}}_{\mathbf{j}}-\overline{\Delta}\rho^i\wedge\omega_{\mathbf{3}}+\rho^i d\omega_3+(\ldots)^i_{jk}\omega^j\wedge\omega^{\mathbf{k}}$$

при условии $d\omega_3 = L_{ij}\omega^i \wedge \omega^j$ следует, что система уравнений $\bar{\Delta}\rho^a\big|_p = 0$, $\bar{\Delta}\rho^i\big|_p = 0$ вполне интегрируема. Дифференциал точки К преобразуем к виду :

$$dK = (\theta + \omega_3 - \lambda_i\omega^i)K + \bar{\Delta}\rho^a B_a + \bar{\Delta}\rho^i B_i + (\dots)_i\omega^i A + \rho^a(\lambda_a\omega^i - \lambda^j_a\omega^b_j\lambda^i_b)B_i +$$
$$+\rho^i\omega^a_i B_a \quad .$$

Уравнения $\bar{\Delta}\rho^a\big|_p = 0$, $\bar{\Delta}\rho^i\big|_p = 0$ являются уравнениями параллельного переноса прямой АК.

Теорема 3. Прямая АК, задаваемая точкой К$\in$ $L_{n-1} = N_{m-1} + C_{n-m-1}$, переносится параллельно в связности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}\}$ при любом смещении точки К, т.е. параллельное перенесение в связности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}\}$ вырождается.

Замечание 3. Если в формуле (16) положить $\rho^a = 0, \rho^i \overset{def}{=} \mu^i$, то получим теорему 1; если $\rho^i = 0, \rho^a \overset{def}{=} \mu^a$, то получится теорема 2.

5. Коаффинное параллельное перенесение. Опишем параллельный перенос касательной прямой АВ из п.2 с помощью ковариантного дифференциала. Произведем нормировку $\mu^i \lambda_i = 1$, тогда $B = A + \mu^i A_i$, причем $\nabla\mu^i - \mu^i\mu^j\omega_j = \mu^i_j\omega^j$. Вводя в последние уравнения формы коаффинной связности, получим $\Delta\mu^i = \tilde{\mu}^i_j\omega^j$, где ковариантный дифференциал и ковариантные производные объекта μ^i относительно связности Γ_2 выражаются по формулам :

$$\Delta\mu^i = d\mu^i + \mu^j\tilde{\omega}^i_j - \mu^i\mu^j\tilde{\omega}_j \;,\; \tilde{\mu}^i_j = \mu^i_j - \mu^k\Gamma^i_{kj} + \mu^i\mu^k\Gamma_{kj} \;. \qquad (17)$$

Внешний дифференциал форм $\Delta\mu^i$ преобразуем к виду :

$$d\Delta\mu^i = \Delta\mu^j \wedge (\dots)^i_j + (\dots)^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k \quad . \qquad (18)$$

Из уравнений (18) видно, что система уравнений $\Delta\mu^i\big|_p = 0$ вполне интегрируема.

Известно, что обращение в ноль ковариантного дифференциала геометрического объекта говорит о параллельном перенесении в некоторой связности фигуры, заданной этим объектом.

Используя выражения (17), найдем дифференциал точки В :

$$dB = (\mu^i\omega_i - \mu^i\omega^a_i\lambda_a + \theta)B + \mu^i\omega^a_i B_a + \Delta\mu^i A_i \;.$$

Уравнения параллельного переноса имеют вид $\Delta\mu^i\big|_p = 0$.

Теорема 4. Касательная прямая AB, заданная точкой $B \in N_{m-1}$, переносится параллельно вдоль линии p в коаффинной связности Γ_2 тогда и только тогда, когда точка B смещается в плоскости $L_{n-m} = C_{n-m-1} + B$.

Замечание 4. В работе [7] рассмотрен перенос нормали N_{m-1} в гиперплоскости L_{n-1}, являющийся несколько иной конструкцией, характерезующей параллельные перенесения в связности Γ_2.

6. Сильный перенос нормальной прямой. Предварительно рассмотрим [5] параллельный перенос плоскости Картана C_{n-m-1}, заданной квазитензором λ^i_a. Вводя формы связности Γ_4 в уравнения (7), получим $\Delta\lambda^i_a = \tilde{\lambda}^i_{aj}\omega^j$, ковариантные производные и ковариантный дифференциал объекта λ^i_a выражаются по формулам :

$$\tilde{\lambda}^i_{aj} = \lambda^i_{aj} - \lambda^k_a\Gamma^i_{kj} + \lambda^i_b\Gamma^b_{aj} - \Gamma^i_{aj}\ , \quad \Delta\lambda^i_a = d\lambda^i_a + \lambda^j_a\tilde{\omega}^i_j - \lambda^i_b\tilde{\omega}^b_a + \tilde{\omega}^i_a\ . \tag{19}$$

Внешний дифференциал ковариантного дифференциала $\Delta\lambda^i_a$ имеет вид :

$$d\Delta\lambda^i_a = -\Delta\lambda^i_b \wedge \tilde{\omega}^b_a + \Delta\lambda^j_a \wedge \tilde{\omega}^i_j + (\ldots)^i_{ajk}\,\omega^j \wedge \omega^k\ . \tag{20}$$

Значит, система $\Delta\lambda^i_a\big|_p = 0$ вполне интегрируема. Смещение плоскости C_{n-m-1} в нормали N_{n-m}, принимая во внимание соотношение (8), является абсолютным параллельным переносом в связности Γ_4 [5].

Введем параллельный перенос прямой AC, где $C \in C_{n-m-1}$. Произведя нормировку $\mu^a \lambda_a = 1$, получим $C = \mu^a A_a + \mu^a \lambda^i_a A_i + A$, причем $\nabla\mu^a - \mu^a\mu^b\omega_b - \mu^a\mu^b\lambda^i_b\omega_i = \mu^a_i\omega^i$. Вводя в последние уравнения формы из совокупности (5), запишем выражение для ковариантного дифференциала объекта μ^a :

$$\Delta\mu^a = d\mu^a + \mu^b\tilde{\omega}^a_b - \mu^a\mu^b\tilde{\omega}_b - \mu^a\mu^b\lambda^i_b\tilde{\omega}_i\ . \tag{21}$$

Внешний дифференциал форм $\Delta\mu^a$ преобразуем следующим образом :

$$d\Delta\mu^a = \Delta\mu^b \wedge (\tilde{\omega}^a_b - \mu^a\lambda^i_b\tilde{\omega}_i - \mu^a\tilde{\omega}_b) - \Delta\mu^a \wedge (\mu^c\lambda^i_c\tilde{\omega}_i + \mu^b\tilde{\omega}_b) -$$
$$\mu^a\mu^b\Delta\lambda^i_b \wedge \tilde{\omega}_i + (\ldots)^a_{ij}\,\omega^i \wedge \omega^j\ . \tag{22}$$

Учитывая уравнения (20), найдем внешний дифференциал входящей в уравнения (22) линейной комбинации ковариантных дифференциалов $\mu^a\Delta\lambda^i_a$:

$$d(\mu^a\Delta\lambda^i_a) = \mu^a\Delta\lambda^i_a \wedge (\mu^b\tilde{\omega}_b + \mu^b\lambda^j_b\tilde{\omega}_j) + \mu^a\Delta\lambda^j_a \wedge \tilde{\omega}^i_j + (\ldots)^i_{jk}\,\omega^j \wedge \omega^k\ . \tag{23}$$

Из уравнений (22), (23) видно, что система уравнений

$$\Delta\mu^a\big|_p = 0\ , \quad \mu^a\Delta\lambda^i_a\big|_p = 0 \tag{24}$$

вполне интегрируема.

Используя выражения ковариантных дифференциалов (19), (21), имеем следующую формулу для дифференциала точки C :

$$dC = \theta C + \Delta\mu^a B_a - (\lambda_a\Delta\mu^a + \mu^a\lambda_i\Delta\lambda^i_a)A +$$

$$+(\omega^i-\mu^b\lambda_b^j\omega_j^a\lambda_a^i+\mu^a\lambda_{aj}^i\omega^j+\mu^a\Delta\lambda_a^i)B_i.$$

Уравнения параллельного переноса прямой АС имеют вид (24).

Теорема 5. Нормальная прямая АС, заданная точкой $C\in C_{n-m-1}$, переносится параллельно в некоторой линейной комбинации (ср.[8]) связности Γ тогда и только тогда , когда точка С смещается в плоскости
$L_m = N_{m-1} + C$.

Замечание 5. Данный перенос нормального направления аналогичен введенному А.В.Чакмазяном [6,с.61] для нормального поля точек, параллельного относительно нормальной центропроективной связности. Подобъект $\{\Gamma_{ai},\Gamma_{bi}^a\}\subset\Gamma$ станет объектом этой связности в репере, адаптированном к нормализации. В связи с тем, что наше исследование ведется в менее канонизированном репере, перенос осуществляется в линейной комбинации связности Г. В работе [8] дана эквивалентная нашей характеристика линейной комбинации связности с помощью параллельного переноса плоскости C_{n-m-1} .

7. Сильный перенос произвольного направления. Будем рассматривать прямую АК, где $K=\rho^a A_a+(\rho^a\lambda_a^i+\rho^i)A_i+(\rho^a\lambda_a+\rho^i\lambda_i)A$. Пусть $\rho^a\lambda_a+\rho^i\lambda_i=1$, тогда $K=\rho^a A_a+(\rho^a\lambda_a^i+\rho^i)A_i+A$, причем

$$\begin{cases}\nabla\rho^a-\rho^a(\rho^b\omega_b+\rho^b\lambda_b^i\omega_i+\rho^i\omega_i)=\rho_i^a\omega^i \ , \\ \nabla\rho^i-\rho^i(\rho^a\omega_a+\rho^a\lambda_a^j\omega_j+\rho^j\omega_j)=\rho_j^i\omega^j \ .\end{cases} \tag{25}$$

Вводя в уравнения (25) формы связности Г, получим следующие выражения для ковариантных дифференциалов объектов ρ^a и ρ^i :

$$\begin{cases}\Delta\rho^a=d\rho^a+\rho^b\tilde\omega_b^a-\rho^a(\rho^b\tilde\omega_b+\rho^b\lambda_b^i\tilde\omega_i+\rho^i\tilde\omega_i) \ , \\ \Delta\rho^i=d\rho^i+\rho^j\tilde\omega_j^i-\rho^i(\rho^a\tilde\omega_a+\rho^a\lambda_a^j\tilde\omega_j+\rho^j\tilde\omega_j) \ .\end{cases} \tag{26}$$

Внешние дифференциалы форм $\Delta\rho^a,\Delta\rho^i$ преобразуем к виду :

$$d\Delta\rho^a=\Delta\rho^b\wedge(\dots)_b^a+\rho^a\rho^b\Delta\lambda_b^i\wedge\tilde\omega_i-\rho^a\Delta\rho^i\wedge\tilde\omega_i+(\dots)_{ij}^a\omega^i\wedge\omega^j \ ,$$

$$d\Delta\rho^i=\Delta\rho^a\wedge(\dots)_a^i-\rho^i\rho^a\Delta\lambda_a^j\wedge\tilde\omega_j+\Delta\rho^j\wedge(\dots)_j^i+(\dots)_{jk}^i\omega^j\wedge\omega^k \ .$$

Система уравнений

$$\Delta\rho^a\Big|_p=0 \ , \ \Delta\rho^i\Big|_p=0 \ , \ \rho^a\Delta\lambda_a^i\Big|_p=0 \tag{27}$$

вполне интегрируема, т.к. внешний дифференциал линейной комбинации $\rho^a\Delta\lambda_a^i$ записывается следующим образом :

$$d(\rho^a\Delta\lambda_a^i)=\rho^a\Delta\lambda_a^i\wedge(\rho^b\tilde\omega_b+\rho^b\lambda_b^j\tilde\omega_j+\rho^j\tilde\omega_j)+\rho^a\Delta\lambda_a^j\wedge\tilde\omega_j^i)+(\dots)_{jk}^i\omega^j\wedge\omega^k \ .$$

Используя выражения (19), (26), найдем дифференциал точки К :

$$dK=\theta K+\Delta\rho^a A_a+\Delta\rho^i A_i+\lambda_a^i\Delta\rho^a A_i+\rho^a\Delta\lambda_a^i A_i+$$
$$+(\rho^a\lambda_{aj}^i\omega^j+\omega^i-\rho^j\lambda_j\omega^i-\lambda_a^i\rho^b\lambda_b^j\Lambda_{jk}^a\omega^k)B_i+\rho^i\Lambda_{ij}^a\omega^j B_a \ .$$

Уравнения (27) задают параллельный перенос прямой АК.

Теорема 6. Прямая АК переносится параллельно в линейной комбинации связности Г тогда и только тогда, когда точка К смещается в гиперплоскости L_{n-1} .

Замечание 6. Теорема 6 является обобщением выводов, полученных в п.5 и п.6 . При $\rho^a = 0$, $\rho^i \overset{\text{def}}{=} \mu^i$ получается теорема 4; при $\rho^i = 0$, $\rho^a \overset{\text{def}}{=} \mu^a$ из теоремы 6 следует теорема 5.

Библиографический список

1. Кобаяси Ш. Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1986. 224с.
2. Шевченко Ю.И . Об основной задаче проективно-дифференциальной геометрии // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1989. Вып.20. С.122-128.
3. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. 248 с.
4. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М.: Наука, 1976. 432 с.
5. Шевченко Ю.И. Параллельные перенесения на поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1979. Вып.10. С. 154-158.
6. Чакмазян А.В. Связность в нормальных расслоениях нормализованного подмногообразия V_m в P_n // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1978. Т.10. С. 55-74.
7. Шевченко Ю.И. Геометрическая характеристика некоторых индуцированных связностей поверхности // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1981. Вып.12. С.126-130.
8. Шевченко Ю.И. Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Там же, 1987. Вып.18. С. 115-120.

K. V. P o l y a k o v a

PARALLEL TRANSFERENCES OF DIRECTIONS ALONG
A SURFASE OF A PROJECTIVE SPACE

Special Cartan's equipment and Norden's normalization of a surface of a projective space and connections induced by them are considered. Projective-covariant differentials of equipping objects are introduced, allowing to discribe classical parallel transferences of a tangent and a normal directions. With the help of usual covariant differentials and their linear combinations strong (compared with classical) parallel transferences are investigated. Parallel transferences of arbitrary directions along a surface are also studied in this article.