4. *Столяров А.В.* Двойственная теория регулярных гиперполос и ее приложения. Чебоксары, 1994. 116 с.

S.Yu.Volkova

DUAL IMAGE OF REGULAR HIPERSTRIP SH_m

The study of regular tangentially-equipped hyperstrips SH_m is continued. It is shown that in the differential neighborhood of the second order regular hyperstrip SH_m induce a projective space, dual to the original with respect to some involute transformation, generated by the hyperstrip SH_m. Dual image of the hyperstrip SH_m is introduced with respect to an involute transformation i.e. normally skewequipped hyperstrip $\overline{SH}_m$. Representation of the hyperstrip $\overline{SH}_m$ is given and described its geometric structure.

УДК 514.76+514.85

О РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ С ИНТЕГРИРУЕМЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

А. А. З а й ц е в
(Калининградский государственный университет)

Рассматривается семейство римановых многообразий, обладающих свойством : в каждом из них уравнения геодезических допускают первый интеграл, выражающийся через метрику другого многообразия. Этого свойства достаточно для вычисления их метрик в предположении, что метрики диагональны. Уравнения геодезических в них интегрируются в квадратурах.

1. Рассмотрим множество L_n n-мерных римановых многообразий, удовлетворяющих условию: $M^n \in L_n$, если уравнения геодезических в M^n допускают первый интеграл вида $F(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} b_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j$, причем в каждой точке T(M): $dF(x,\dot{x}) \wedge dT(x,\dot{x}) \neq 0$, $T(x,\dot{x}) = \frac{1}{2} g_{ij}(x)\dot{x}^i\dot{x}^j$- кинетическая энергия в M^n (g_{ij}- компоненты метрического тензора в M^n). Их исследованными случаями являются многообразия Лиувилля с метрикой $ds^2 = v(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{(dx^i)^2}{s^i(x^i)}$, $v(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x^i)$ [1,с.170], [2,с.91]; эллипсоиды, уравнения геодезических на которых проинтегрировал Якоби [3], а также римановы многообразия с метрикой Штеккеля [2,с.93].

В [4] установлен следующий результат: если $\hat{g}^{ij} = g^{ik}g^{jl}b_{kl}$, то

$$g^{m(i}\partial_m\hat{g}^{jk)} - \hat{g}^{m(i}\partial_m g^{jk)} = 0,\ \ \partial_m g^{jk} = \frac{\partial g^{jk}}{\partial x^m}. \tag{1}$$

Соотношения (1) ковариантны, т.е. не меняются при переходе в другую систему координат. Если тензоры g^{ij} и $\hat{g}^{ij}$ диагональны в некоторой системе координат, то уравнения (1) в этой координатной системе сводятся к виду

$$\left(g^{ii}\right)^{-1}\partial_i g^{jj}=\left(\hat{g}^{ii}\right)^{-1}\partial_i g^{jj} \tag{2}$$

(здесь и дальше нет суммирования по повторяющимся индексам). Полагая $\hat{g}^{ii}=g^{ii}u^i$, получаем из (2)

$$\partial_i u^i=0,\ \ \partial_j\varphi^{ij}=0, \tag{3}$$

где

$$\varphi^{ij}=\left(u^i-u^j\right)g^{ii}. \tag{4}$$

Таким образом, для определения метрик рассматриваемых многообразий требуется решить задачу: найти набор функций u^i, φ^{ji}, не зависящих от координаты x^i и удовлетворяющих соотношению (4). В данной работе ставится цель получить решение этой задачи для размерности n=2,3, а затем показать, что уравнения геодезических в $M^2\in L_2$ и $M^3\in L_3$ интегрируются сведением к квадратурам.

2. При n=2 общее решение системы (3) есть $u^1=v^2\left(x^2\right)$, $u^2=v^1\left(x^1\right)$, $\varphi^{12}=s^1\left(x^1\right)$, $\varphi^{21}=s^2\left(x^2\right)$, где $s^i\left(x^i\right)$, $v^i\left(x^i\right)$, i=1,2 - произвольные гладкие функции. Учитывая равенства (4) и $g_{ii}=1/g^{ii}$, получаем

$$g_{11}=\left(v^2\left(x^2\right)-v^1\left(x^1\right)\right)/s^1\left(x^1\right),\ g_{22}=\left(v^1\left(x^1\right)-v^2\left(x^2\right)\right)/s^2\left(x^2\right). \tag{5}$$

Это есть общая формула для диагональных компонент метрического тензора на многообразиях из L_2. Она показывает, что элементами L_2 являются только поверхности Лиувилля.

Для интегрирования уравнений геодезических в $M^2\in L_2$ нужно записать первые интегралы этих уравнений, используя формулы (5):

$$\begin{gathered}\left(v^2\left(x^2\right)-v^1\left(x^1\right)\right)\left(\left(\dot{x}^1\right)^2/s^1\left(x^1\right)-\left(\dot{x}^2\right)^2/s^2\left(x^2\right)\right)=-2T,\\ \left(v^1\left(x^1\right)-v^2\left(x^2\right)\right)\left(v^2\left(x^2\right)\left(\dot{x}^1\right)^2/s^1\left(x^1\right)-v^1\left(x^1\right)\left(\dot{x}^2\right)^2/s^2\left(x^2\right)\right)=-2F,\end{gathered} \tag{6}$$

где величины **T** и **F** принимают постоянные значения вдоль геодезических. Решая систему (6) относительно $\dot{x}^1$ и $\dot{x}^2$ и разделяя переменные, получаем

$$\frac{dx^1}{r^1\left(x^1\right)}-\frac{dx^2}{r^2\left(x^2\right)}=0,\quad \frac{v^1\left(x^1\right)dx^1}{r^1\left(x^1\right)}-\frac{v^2\left(x^2\right)dx^2}{r^2\left(x^2\right)}=-\sqrt{2}dt, \tag{7}$$

где $r^i(z)=\sqrt{s^i(z)\left(F-Tv^i(z)\right)}$. Интегрируя равенства (7), находим известное решение уравнений геодезических на поверхностях Лиувилля в квадратурах.

Решение Якоби задачи о геодезических на эллипсоиде также получается по формулам (7) следующим образом. Пусть в трехмерном евклидовом пространстве с прямоугольной системой координат $\left(\xi^1,\xi^2,\xi^3\right)$ задан эллипсоид $\left(\xi^1\right)^2/a^1+\left(\xi^2\right)^2/a^2+\left(\xi^3\right)^2/a^3=1$, $0<a^1<a^2<a^3$. Введем на нем координаты $\left(x^1,x^2\right)$, определив их как положительные корни уравнения (относительно λ) $\left(\xi^1\right)^2/\left(a^1-\lambda\right)+\left(\xi^2\right)^2/\left(a^2-\lambda\right)+\left(\xi^3\right)^2/\left(a^3-\lambda\right)=1$; они удовлетворяют неравенствам $a^1<x^1<a^2<x^2<a^3$. Метрика на эллипсоиде, индуцированная обычной евклидовой метрикой в R^3, в координатах $\left(x^1,x^2\right)$ имеет вид

$$ds^2=g_{11}(x)\left(dx^1\right)^2+g_{22}(x)\left(dx^2\right)^2,$$

где $g_{11}=-\left(x^1-x^2\right)/s\left(x^1\right)$,

$g_{22}=-\left(x^2-x^1\right)/s\left(x^2\right)$,

$s(z)=4\left(z-a^1\right)\left(z-a^2\right)\left(z-a^3\right)/z$.

Эти формулы являются частными случаями формул (5) при $v^i\left(x^i\right)=x^i$, поэтому интегрирование уравнений (7) решает задачу Якоби.

3. При n=3 из (3) следуют зависимости $u^i=u^i\left(x^j,x^k\right)$, $\varphi^{ij}=\varphi^{ij}\left(x^i,x^k\right)$, причем тройка (i,j,k) есть циклическая перестановка набора (1,2,3) (это условие предполагается выполненным в п.3). Если из соотношений (4) исключить величины g^{ii}, u^i и обозначить $\Phi^k=\varphi^{ik}/\varphi^{jk}$, то для новых функций получается функциональное уравнение

$$\Phi^1\left(x^2,x^3\right)\Phi^2\left(x^3,x^1\right)\Phi^3\left(x^1,x^2\right)=-1. \qquad (8)$$

Лемма. Общее решение функционального уравнения $f^{\{i}\left(x^j,x^{k\}}\right)=0$ (фигурная скобка обозначает циклирование) дает формула $f^i\left(x^j,x^k\right)=h^j\left(x^j\right)-h^k\left(x^k\right)$, где $h^i\left(x^i\right)$ - произвольные функции.

Используя лемму, с помощью подстановки $f^i=\ln\left(-\Phi^i\right)$ получаем общее решение уравнения (8) в виде

$$\Phi^k\left(x^i,x^j\right)=-s^j\left(x^j\right)/s^i\left(x^i\right), \qquad (9)$$

где $s^i\left(x^i\right)$ - произвольные функции.

После подстановки (9) в (4) и ряда преобразований получаем

$$\left(s^i\left(x^i\right)\varphi^{ij}\left(x^i,x^k\right)\right)^{-1}+\left(s^j\left(x^j\right)\varphi^{jk}\left(x^j,x^i\right)\right)^{-1}+\left(s^k\left(x^k\right)\varphi^{ki}\left(x^k,x^i\right)\right)^{-1}=0.$$

Решение этого уравнения снова получается с помощью леммы и имеет вид

$$\varphi^{ij}\left(x^i, x^k\right) = \left(s^i\left(x^i\right)\left(v^i\left(x^i\right) - v^k\left(x^k\right)\right)\right)^{-1} \tag{10}$$

($v^i\left(x^i\right)$ - новые произвольные функции с непересекающимися интервалами значений). Отметим, что формула (10) получена в предположении, что индексная тройка (i,j,k) представляет собой циклическую перестановку (1,2,3), но вычисление $\varphi^{ij}\left(x^i, x^k\right)$ для других троек различных индексов с помощью (9), (10) и определение функций $\Phi^k\left(x^i, x^j\right)$ показывает ее справедливость в общем случае.

Упрощая систему (4) с помощью (10), получаем

$$\begin{gathered}\left(v^i\left(x^i\right) - v^j\left(x^j\right)\right)u^k\left(x^i, x^j\right) + \left(v^j\left(x^j\right) - v^k\left(x^k\right)\right)u^i\left(x^j, x^k\right) + \\ + \left(v^k\left(x^k\right) - v^j\left(x^i\right)\right)u^j\left(x^k, x^i\right) = 0\end{gathered}\ . \tag{11}$$

Уравнение (11) также решается с помощью леммы; в результате находим

$$u^i\left(x^j, x^k\right) = \left(w^j\left(x^j\right) - w^k\left(x^k\right)\right)\left(v^j\left(x^j\right) - v^k\left(x^k\right)\right)^{-1}, \tag{12}$$

$w^i\left(x^i\right)$ - произвольные функции. Далее из (4), (10), (12) находим значения диагональных элементов метрического тензора

$$g_{ii} = \frac{ws^i\left(x^i\right)}{v^j\left(x^j\right) - v^k\left(x^k\right)}, \quad b_{ii} = \frac{w^j\left(x^j\right) - w^k\left(x^k\right)}{v^j\left(x^j\right) - v^k\left(x^k\right)} g_{ii}(x), \tag{13}$$

где $w = v^1\left(x^1\right) w^2\left(x^2\right) - v^2\left(x^2\right) w^1\left(x^1\right) + v^2\left(x^2\right) w^3\left(x^3\right) - v^3\left(x^3\right) w^1\left(x^1\right) --$ $v^1\left(x^1\right) w^3\left(x^3\right)$. Метрика с диагональными элементами g_{ii}, определяемыми первой из формул (13), получена Штеккелем в предположении, что соответствующее уравнение Гамильтона-Якоби интегрируется разделением переменных [2,с.93]. Таким образом, показано, что если метрика многообразия из L_2 диагональна, то она является метрикой Штеккеля.

Предложение 1. Преобразование $v^i \to \left(v^i\right)^{-1}$, $w^i \to w^i\left(v^i\right)^{-1}$, $s^i \to v^i s^i$ не меняет метрического тензора g_{ij}, а диагональные компоненты тензора b_{ii} оно переводит в

$$\widetilde{b}_{ii} = \left(v^j\left(x^j\right)w^k\left(x^k\right) - v^k\left(x^k\right)w^j\left(x^j\right)\right)\left(v^j\left(x^j\right) - v^k\left(x^k\right)\right)^{-1} g_{ii}.$$

Доказывается прямым вычислением. Из предложения 1 следует

Предложение 2. Функции

$$E_m(x, \dot{x}) = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} v_{mi}(x) g_{ii}\left(\dot{x}^i\right)^2 \quad \text{(m=1,2,3)}, \tag{14}$$

где $v_{1i}=1,\ v_{2i}=\left(w^j\left(x^j\right)-w^k\left(x^k\right)\right)\left(v^j\left(x^j\right)-v^k\left(x^k\right)\right)^{-1}$,

$v_{3i}=\left(v^j\left(x^j\right)w^k\left(x^k\right)-v^k\left(x^k\right)w^j\left(x^j\right)\right)\left(v^j\left(x^j\right)-v^k\left(x^k\right)\right)^{-1}$ являются первыми интегралами уравнений геодезических в $M^3\in L_3$.

Решая уравнение (14) относительно $\dot{x}^i$ и разделяя переменные, получаем

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_{mi}(x)\frac{dx^i}{r^i\left(x^i\right)}=-\sqrt{2}\delta_{m3}dt, \qquad (15)$$

где $r^i\left(x^i\right)=\sqrt{\left(E_1w^i\left(x^i\right)-E_2v^i\left(x^i\right)-E_3\right)\left(s^i\left(x^i\right)\right)^{-1}}$, $\alpha_{1i}\left(x^i\right)=1$, $\alpha_{2i}\left(x^2\right)=v^i\left(x^i\right)$, $\alpha_{3i}=w^i\left(x^i\right)$. Интегрируя уравнения (15), получаем решение уравнений геодезических в квадратурах.

4. Полученные результаты переносятся на случай любого n. Основное утверждение: если первым интегралом геодезического потока в M^n является кинетическая энергия другого n-мерного риманова многообразия и метрики обоих многообразий диагональны, то метрика в M^n штеккелева и уравнения геодезических интегрируются в квадратурах. Иными словами, для интегрируемости геодезических потоков достаточно существования единственного дополнительного интеграла движения, а не n, как в теореме Лиувилля об интегрируемых гамильтоновых системах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 96-01-01408.

Библиографический список

1. *Гантмахер Ф.Р.* Лекции по аналитической механике. М.: Физматгиз, 1960. 296 с.

2. *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990. 240 с.

3. *Якоби К.Г.* Лекции по динамике. М.; Л., 1936. 279 с.

4.*Зайцев А.А.* Римановы пространства с общим набором первых интегралов уравнений геодезических // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып.27. С.33-42.

A.A.Zaitsev

ON RIEMANN MANIFOLDS WITH INTEGRABLE GEODESIC EQUATIONS

It is considered a set of Riemann manifolds with a property: in each of them equations of geodesics have a first integral expressing by a metric of another manifold. This property is sufficient for a calculation its metrics in an assumption that both metrics are diagonal. Equation of geodesics may be integrated in quadratures.