Кроме того,

$$(A_1 A_2 ; E E^*) = -1 . \tag{3.10}$$

2) Торсы прямолинейной конгруэнции $(A_0 A_3)$ определяются уравнением:

$$(\omega^1 + \omega^2)^2 = 0. \tag{3.11}$$

Пусть

$$\bar{F} = t^1 \bar{A}_0 + t^2 \bar{A}_3 \tag{3.12}$$

– фокус луча $A_0 A_3$. Тогда

$$(t^1)^2 + p^2 (t^2) = 0 . \tag{3.13}$$

Следовательно,

$$(A_0 A_3 ; F_1 F_2) = -1 . \tag{3.14}$$

3) Для прямолинейной конгруэнции $(A_1 A_2)$ доказательство аналогично.

Библиографический список

1. Ш м е л е в а С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с двумя трехкратными фокальными поверхностями // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр./ Калинингр. ун-т. Калининград, 1994. Вып.25. С.121-125.

УДК 514.75

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ ЦЕНТРОВ МНОГООБРАЗИЯ ГИПЕРКВАДРИК

Е.П.Ю р о в а

(Калининградский государственный университет)

В n-мерном аффинном пространстве A_n рассматривается $(n-1)$-мерное многообразие V_{n-1} центральных невырожденных гиперквадрик Q . На гиперповерхности C центров гиперквадрик этого многообразия построены и геометрически охарактеризованы порожденные им четыре векторных поля. Доказан ряд предложений о взаимосвязях между ними.

Данная статья является продолжением работ [1], [2], при этом используются обозначения и результаты последних. Индексы принимают следующие значения; $\alpha, \rho, \gamma = \overline{1,n}$; $i, j, k = \overline{1,n-1}$.

В работе [2] построены и геометрически охарактеризованы два поля инвариантных нормалей II рода b и β гиперповерхности C центров гиперквадрик $Q \in V_{n-1}$. В используемом в [2] репере указанные нормали задаются соответственно системами:

$$x^n = 0 , \quad b_i x^i = 2, \tag{1}$$

$$x^n = 0 , \quad \beta_i x^i = 2, \tag{2}$$

где

$$b_i = a^{pq} b_{pqi} , \quad \beta_i = b_i + a^{nn} b_{nni} \tag{3}$$

Пусть касательные к гиперповерхности C векторы $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$ имеют своим началом центр P гиперквадрики Q , а концами соответственно полюсы $(n-2)$-плоскостей (1) и (2) относительно квадратичного элемента $Q \cap T_Q$, рассматриваемого как гиперквадрика в касательной гиперплоскости T_Q гиперповерхности C в центре P гиперквадрики Q . Для $\bar{\xi} = \{\xi^i\}$ и $\bar{\eta} = \{\eta^i\}$ получаем:

$$\xi^i = \frac{1}{2} a^{ij} a^{pq} b_{pqj} , \quad \eta^i = \frac{1}{2} a^{ij} (a^{pq} b_{pqj} + a^{nn} b_{nnj}) . \tag{4}$$

Обозначим вершины [2] гиперквадрики Q символом $S^{\pm}$, а поверхности, описываемые ими, символом $\sigma^{\pm}$. Числа $\dim \sigma^{\pm}$ являются арифметическими инвариантами многообразия V_{n-1} , и в общем случае $\dim \sigma^{\pm} = n-1$.

В нашем репере уравнение гиперповерхности C имеет вид: $\omega^n = 0$, откуда вытекает: $\omega_i^n = c_{ij} \omega^j$. Для изучения гиперповерхностей $\sigma^{\pm}$ поместим конец вектора $\bar{e}_n$ репера в точку S^+ . При этом выполняется: $a_{in} \equiv 0$, $a_{nn} \equiv 1$. Система (1) дифференциальных уравнений работы [1] тогда приводит к уравнениям:

$$\omega_n^n = -\frac{1}{2} b_{nni} \omega^i , \quad \omega_n^i = V_j^i \omega^j, \tag{5}$$

где

$$V_j^i = - a^{it} (c_{tj} + b_{tnj}).$$

Пусть $d\bar{P}$ определяет направление $\omega^p \neq 0$, $\omega^i = 0$ ($i \neq p$). Из (5) вытекает, что касательная к $\sigma^{\pm}$ в точке $S^{\pm}$ прямая, соответствующая указанному направлению $d\bar{P}$ пересекает гиперплоскость $x^n = 0$ в точке $A_p^{\pm} = \{ {}^{\pm} x^i_{(p)} \}$, для которой

$$ {}^{\pm} x^i_{(p)} = \frac{2}{b_{nnp}} (\delta_p^i \pm V_p^i). \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что каждая касательная в $S^{\pm}$ гиперплоскость $T_{S^{\pm}} (\sigma^{\pm})$ к гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ пересекает касательную к C гиперплоскость T_Q по нормали II рода, которая определяется своими базисными точками $A_p^{\pm}$. Найдем векторы $\bar{u}, \bar{v} \in T_Q$, концы которых находятся в полярном соответствии указанным двум нормалям II рода относительно $Q \cap T_Q$, которое использовалось для построения векторов $\bar{\xi}$ и $\bar{\eta}$. Для координат x^i векторов $\bar{u}, \bar{v}$ получаем соответственно две системы линейных уравнений:

$$a_{ij} x^i (\delta_p^j \pm V_p^j) = \frac{1}{2} b_{nnp}. \qquad (7)$$

В общем случае решения систем (7) определяют векторы $\bar{u}, \bar{v}$.

Из геометрических построений, которые привели к векторам $\bar{u}$ и $\bar{v}$, вытекают следующие два утверждения.

П р е д л о ж е н и е I. Гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ касаются гиперповерхности Q соответственно в точках $S^{\pm}$ в том и только в том случае, если выполняется:

$$\bar{u} = 0, \ \bar{v} = 0. \qquad (8)$$

П р е д л о ж е н и е 2. Три касательных гиперплоскости $T_{S^+}(\sigma^+), T_{S^-}(\sigma^-)$ и T_Q принадлежат одному пучку в том и только в том случае, если выполняется: $\bar{u} = \bar{v}$.

Следующее предложение усиливает предложение I.

П р е д л о ж е н и е 3. Гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ касаются гиперповерхности Q соответственно в точках $S^{\pm}$ в том и только в том случае, если выполняется:

$$\bar{u} + \bar{v} = 0. \qquad (9)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{u} = \{u^i\}$, $\bar{v} = \{v^i\}$ и выполняется (9): $v^i = -u^i$. Тогда из (7) вытекает:

$$a_{ip} u^i + a_{ij} u^i v_p^j = \frac{1}{2} b_{nnp}, \quad -a_{ip} u^i + a_{ij} u^i v_p^j = \frac{1}{2} b_{nnp},$$

откуда получаем: $a_{ip} u^i = 0$, и справедливо, $u^i = 0$, $v^i = 0$. Обратное очевидно: из (8) вытекает (9). Доказываемое предложение теперь следует из предложения I.

П р е д л о ж е н и е 4. Если гиперплоскости $T_{S^+}(\sigma^+), T_{S^-}(\sigma^-)$ и T_Q принадлежат одному пучку, то выполняется

$$\bar{\eta} = \bar{u} + \bar{\xi}, \quad \bar{\eta} = \bar{v} + \bar{\xi}. \qquad (10)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $u^i = v^i$ из (7) получаем: $u^i = \frac{1}{2} a^{ip} b_{nnp}$. Равенства $a_{in} = 0$, $a_{nn} = 0$ приводят к $a^{nn} = 1$. Из (3), (4) тогда получаем (10).

Из доказанных предложений вытекает следующее утверждение.

П р е д л о ж е н и е 5. Если $\bar{u} + \bar{v} = 0$, то $\bar{\eta} = \bar{\xi}$. Геометрически это означает: если гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ касаются гиперповерхности Q соответственно в точках $S^{\pm}$, то нормали II рода b и β совпадают.

П р е д л о ж е н и е 6. Если нормали II рода b и β совпадают, а векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ определяются однозначно, то гиперповерхности $\sigma^{\pm}$ касаются гиперповерхности Q соответственно в точках $S^{\pm}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $\bar{\eta} = \bar{\xi}$ системы (7) однородны и если их решения единственны, то они нулевые: $\bar{u} = \bar{v} = 0$. Доказываемое утверждение теперь вытекает из предложения I.

Библиографический список

I. С о п и н а Е.П. Об инвариантных образах, ассоциированных с конгруэнцией центральных невырожденных гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калинингр. ун-т. Калининград, I986. Вып.I7. С.83-86.

2. Ю р о в а Е.П. Нормали II рода гиперповерхности центров многообразия гиперквадрик // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз. темат. сб. науч. тр. / Калининград. ун-т. Калининград, I993. Вып.24. С.I3I-I33.