ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.11 1980

М.В.Бразевич

К ВОПРОСУ ОБ ИНФЛЕКЦИОННЫХ ЦЕНТРАХ В ПАРАХ КОМПЛЕКСОВ

Теория нормализованного многообразия Грассмана $NG_r(1,3)$ [1] дает инвариантный аналитический подход к изучению пар линейчатых многообразий трехмерного проективного пространства. В данной заметке пара комплексов прямых рассматривается как подмногообразие $NG_r(1,3)$ и строятся тензоры, определяющие инфлекционные центры лучей. Работа выполнена методом Г.Ф.Лаптева [2].

§1. Пара комплексов как подмногообразие $NG_r(1,3)$

Нормализованное многообразие Грассмана $NG_r(1,3)$ есть многообразие $G_r(1,3)$, оснащенное полем дифференциально-геометрического объекта

$$\nabla h^p_\alpha + \omega^p_\alpha = h^{pq}_{\alpha\beta}\,\omega^\beta_q, \qquad (1)$$

$$(p,q,\ldots=1,2;\ \alpha,\beta,\ldots=3,4;\ a,b,\ldots=1,2,3,4),$$

где ω^b_a – 1-формы проективной группы $PG(3,R)$, структурные уравнения которой имеют вид:

$$\mathcal{D}\omega^b_a=\omega^c_a\wedge\omega^b_c. \qquad (2)$$

В подвижном репере $\{A_c\}$ $(dA_c=\omega^b_c A_b)$ оснащающий объект h^p_α каждой прямой $\ell=(A_1A_2)$ ставит в соответствие нормализующую прямую ℓ^*

$$x^p=h^p_\alpha x^\alpha \qquad (3)$$

Поскольку многообразие $NG_r(1,3)$ является секущей поверхностью расслоенного пространства $E=G_r(1,3)\times G_r(1,3)$ с 4-мерной базой, а лифты 3-мерных подмногообразий базы суть пары комплексов прямых, то изучение пар комплексов сводится к изучению лифтов. Эти лифты назовем 3-мерными подмногообразиями многообразия $NG_r(1,3)$.

Трехмерное подмногообразие многообразия $NG_r(1,3)$ в общем репере $\{H_a\}$, где $H_p=A_p$, $H_\alpha=A_\alpha+h^p_\alpha A_p$ и $dH_a=\theta^b_a H_b$ определяется дифференциальными уравнениями

$$\theta^\alpha_p=a^\alpha_{p\mathcal{I}}\textcircled{H}^{\mathcal{I}},\quad \theta^p_\alpha=a^p_{\alpha\mathcal{I}}\textcircled{H}^{\mathcal{I}}. \qquad (4)$$

Здесь $\textcircled{H}^{\mathcal{I}}$ $(\mathcal{I},\mathcal{J},\ldots=1,2,3)$ линейно-независимые 1-формы, структурные уравнения которых для случая $\mathcal{I}=1,2,..p$ даны в [3]; функции $a^\alpha_{p\mathcal{I}}$ и $a^p_{\alpha\mathcal{I}}$ связаны соотношениями

$$a^p_{\alpha\mathcal{I}}=\mathcal{H}^{pq}_{\alpha\beta}\,a^\beta_{q\mathcal{I}},\quad \text{где}\quad \mathcal{H}^{pq}_{\alpha\beta}=h^{pq}_{\alpha\beta}-h^p_\beta h^q_\alpha, \qquad (5)$$

и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla a^\alpha_{p\mathcal{I}}=a^\alpha_{p\mathcal{I}\mathcal{J}}\textcircled{H}^{\mathcal{J}},\quad \nabla a^p_{\alpha\mathcal{I}}=a^p_{\alpha\mathcal{I}\mathcal{J}}\textcircled{H}^{\mathcal{J}}, \qquad (6)$$

причем

$$a^\alpha_{p\mathcal{I}\mathcal{J}}=a^\alpha_{p\mathcal{J}\mathcal{I}},\quad a^p_{\alpha\mathcal{I}\mathcal{J}}=a^p_{\alpha\mathcal{J}\mathcal{I}}.$$

Из (4)-(6) первая и вторая дифференциальные окрестности пары комплексов определяются системами величин

$$\{a^\alpha_{p\mathcal{I}},\ a^p_{\alpha\mathcal{I}}\}\ \text{и}\ \{a^\alpha_{p\mathcal{I}},\ a^p_{\alpha\mathcal{I}},\ a^\alpha_{p\mathcal{I}\mathcal{J}},\ a^p_{\alpha\mathcal{I}\mathcal{J}}\}. \qquad (7)$$

§2. Построение тензоров, определяющих инфлекционные центры лучей

Предварительно отметим, что в первой дифференциальной окрестности пары комплексов мы можем выделить величины μ^p_α и M^α_p, определяемые с точностью до скалярного множителя из линейных систем

$$\mu^p_\alpha a^\alpha_{pJ} = 0, \quad \mu^\alpha_p a^p_{\alpha J} = 0. \qquad (8)$$

Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\nabla\mu^p_\alpha + \mu^p_\alpha(2\omega^\beta_\beta - 2\omega^q_q - \textcircled{H}^J_J) = \mu^p_{\alpha J}\textcircled{H}^J,$$

$$\nabla\mu^\alpha_p - \mu^\alpha_p(2\omega^\beta_\beta - 2\omega^q_q - \textcircled{H}^J_J) = \mu^\alpha_{pJ}\textcircled{H}^J$$

и задают корреляции на лучах $\ell=(H_1,H_2)$ и $\ell^*=(H_3,H_4)$.

Во второй дифференциальной окрестности выделим следующие подобъекты:

1.Неголономные ковариантные производные величин $\mu^p_\alpha, \mu^\alpha_p, a^\alpha_{pJ}, a^p_{\alpha J}$ относительно перспективной связности,индуцируемой оснащающим объектом h^p_α [4].Эти производные имеют вид:

$$\bar\mu^p_{\alpha J} = \mu^p_{\alpha J} - \mu^t_\alpha h^p_\beta a^\beta_{tJ} - \mu^p_\beta h^t_\alpha a^\beta_{tJ} + 4\mu^p_\alpha h^t_\beta a^\beta_{tJ}, \qquad (9)$$

$$\mu^\alpha_{pJ} = \mu^\alpha_{pJ} + \mu^\beta_p h^q_\beta a^\alpha_{qJ} + \mu^\alpha_q h^q_\beta a^\beta_{pJ} - 4\mu^\alpha_p h^q_\beta a^\beta_{qJ}, \qquad (10)$$

$$\bar a^\alpha_{pJJ} = a^\alpha_{pJJ} + h^t_\beta(a^\beta_{pJ}a^\alpha_{tJ} + a^\alpha_{tJ}a^\beta_{pJ}), \qquad (11)$$

$$\bar a^p_{\alpha JJ} = a^p_{\alpha JJ} - a^\beta_{tJ}(h^p_\beta a^t_{\alpha J} + h^t_\alpha a^p_{\beta J}). \qquad (12)$$

2.Тензоры

$$C_{JJ} \overset{def}{=} \mu^p_\alpha \bar a^\alpha_{pJJ}, \quad b_{JJ} \overset{def}{=} \mu^\alpha_p \bar a^p_{\alpha JJ}, \qquad (13)$$

$$C^{pq}_J \overset{def}{=} \frac{1}{2}\mu^{(p}_{[3}\bar\mu^{q)}_{4]J}, \quad C^{\alpha\beta}_J \overset{def}{=} \frac{1}{2}\mu^{(\alpha}_{[1}\bar\mu^{\beta)}_{2]J}, \qquad (14)$$

$$h^{pq\tau s} \overset{def}{=} C^{pq}_J C^{\tau s}_J C^{JJ}, \quad h^{\alpha\beta\gamma\varepsilon} \overset{def}{=} C^{\alpha\beta}_J C^{\gamma\varepsilon}_J b^{JJ}, \qquad (15)$$

где C^{JJ} и b^{JJ} тензоры,обратные к тензорам C_{JJ} и b_{JJ}. Дифференциальные уравнения величин (9)-(15) выписывать не будем.Заметим,что при перенормировании величин μ^p_α и μ^α_p ,т.е.если положить,например, $\tilde\mu^p_\alpha = \rho\mu^p_\alpha$,где $\rho=\rho(\ell)$ и $d\rho = \rho_J\textcircled{H}^J$,тензоры (15) преобразуются следующим образом

$$\tilde h^{pq\tau s} = \rho^3 h^{pq\tau s}, \quad \tilde h^{\alpha\beta\gamma\varepsilon} = \rho^3 h^{\alpha\beta\gamma\varepsilon}$$

Покажем,что тензоры (15) определяют инфлекционные центры лучей ℓ и ℓ^* соответственно.

Возьмем точку $M = H_1 + tH_2 \in \ell$,ей в основной корреляции соответствует плоскость

$$\pi = (\mu^2_4 - \mu^1_4 t)(H_1H_2H_3) + (\mu^1_3 t - \mu^2_3)(H_1H_2H_3).$$

Точка M будет инфлекционным центром луча ℓ тогда и только тогда,когда при фиксации точки M плоскость π стационарна.Условия стационарности плоскости π можно записать в виде

$$B_J\textcircled{H}^J = 0, \quad C_{JJ}\textcircled{H}^J = B_J\textcircled{H}, \quad \mathcal{D}\textcircled{H} = 0, \qquad (16)$$

где

$$B_J = C^{11}_J t^2 - 2C^{12}_J t + C^{22}_J.$$

Исключая случай,когда $\det\|C_{JJ}\| = 0$, и положив $t = -\frac{t_1}{t_2}$ из (16) приходим к следующему уравнению,определяющему координаты точки M

$$h^{pq\tau s}t_p t_q t_\tau t_s = 0. \qquad (17)$$

Аналогично,если точка $N = t_3H_4 - t_4H_3$ -инфлекционный центр луча ℓ^* ,то ее координаты определяются из уравнения

$$h^{\alpha\beta\gamma\varepsilon}t_\alpha t_\beta t_\gamma t_\varepsilon = 0.$$

Заметим,что в известной нам литературе (см.хотя бы [5])уравнения,определяющие инфлекционные центры луча комплекса,выводятся при конкретном выборе базисных 1-форм и подфиксация репера.

Список литературы

1.Б р а з е в и ч М.В. Некоторые вопросы геометрии нормализованного многообразия Грассмана.ВИНИТИ,№ 354-76 Деп.

2.Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Тр.Моск.матем.об-ва,1953,№2,с. 275-382.

3.О с т и а н у Н.М. Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве.-Тр.Геометр.семинара ВИНИТИ АН СССР,1967, 2 , с.247-262.

4.Б л из н и к а с В.И.Некоторые вопросы теории неголономных комплексов.-Тр.Геометрич.семинара ВИНИТИ АН СССР,1974, 5 ,с.69-96.

5.К о в а н ц о в Н.И. Теория комплексов.-Изд.Киевского ун-та,1963.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.II 1980

Л.А.В е р б и ц к а я

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАРАБОЛ

В эквиаффинном трехмерном пространстве рассматриваются конгруэнции S парабол с кратной неторсовой поверхностью A ,не являющейся огибающей семейства плоскостей парабол,причем фокальные линии на поверхности не асимптотические.Исследуются случаи,когда эта фокальная поверхность является кратной фокальной поверхностью.Рассмотрены геометрические образы,ассоциированные с конгруэнцией S ,и исследованы их свойства.

§ 1.КОНГРУЭНЦИИ ПАРАБОЛ С КРАТНОЙ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В работе [1] построен канонический репер конгруэнции S .Начало A репера $\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ помещено в фокус,образующий неразвертывающуюся фокальную поверхность с неасимптотическими фокальными линиями.Вектор $\overline{e}_1$ направлен по касательной к параболе в точке A ,вектор $\overline{e}_3$ -по диаметру параболы,проходящему через точку A , вектор $\overline{e}_2$ -по касательной к линии,сопряженной фокальной линии $\omega^2=0$ на поверхности A .

Относительно этого репера уравнение параболы и система уравнений Пфаффа конгруэнции имеют соответственно вид:

$$(x^1)^2-2px^3=0\,,\quad x^2=0\,,\quad p\neq 0\,, \qquad (1.1)$$