УДК 514.75

О ПОВЕРХНОСТЯХ ВЕЙНГАРТЕНА $V_p \subset E_n$

Н.И.М о с к а л е н к о

(Московский государственный педагогический институт)

Рассмотрены многомерные поверхности Вейнгартена с функциональной зависимостью между скалярной кривизной и средней кривизной, получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы поверхность была поверхностью Вейнгартена.

Пусть задана p-мерная поверхность V_p в евклидовом пространстве E_n. Она является базой своего касательного векторного расслоения $T(V_p)$ и нормального векторного расслоения $N(V_p)$. Слоями этих расслоений являются, соответственно, касательное p-мерное пространство T_x и нормальное $(n-p)$-мерное пространство N_x. Присоединим к поверхности V_p подвижной репер $(x, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ так, чтобы векторы $\vec{e}_i$ $(i, j, k, s, t = 1, 2, \dots, p)$ принадлежали слою T_x, а векторы $\vec{e}_a$ $(a, b = p+1, \dots, n)$ составляли ортонормированный базис слоя N_x. Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются уравнениями

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a, \quad d\vec{e}_a = \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^b \vec{e}_b.$$

Продолжая дважды систему $\omega^a = 0$ дифференциальных уравнений нашей поверхности, получим

$$\omega_i^a = b_{ij}^a \omega^j, \quad b_{ij}^a = b_{ji}^a; \quad db_{ij}^a - b_{ik}^a \omega_j^k - b_{kj}^a \omega_i^k + b_{ij}^b \omega_b^a = b_{ijk}^a \omega^k, \tag{I}$$

где b_{ijk}^a – симметричны по нижним индексам. Имеем систему $\frac{1}{2}p(p+1)$ векторов $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^a \vec{e}_a$. Пусть q – число независимых векторов этой системы. Вместе с точкой x они определяют q-плоскость $N_q(x)$ – главную нормаль поверхности V_p в точке x. Векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha, \beta = p+1, \dots, p+q)$ расположим в плоскости $N_q(x)$. Тогда все векторы $\vec{b}_{ij}$ будут разлагаться по q векторам $\vec{e}_\alpha$: $\vec{b}_{ij} = b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$. Через $\gamma_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$ обозначим метрический тензор поверхности V_p, γ^{ij} – контравариантные компоненты метрического тензора. При этом выполняются равенства

$$d\gamma^{ij} = -\gamma^{ik} \omega_k^j - \gamma^{jk} \omega_k^i. \tag{2}$$

В дальнейшем будем рассматривать неминимальную поверхность, т.е. поверхность, у которой вектор средней кривизны $\vec{M} = \frac{1}{p} \gamma^{ij} b_{ij}^\alpha \vec{e}_\alpha$ отличен от нуля. В плоскости $N_q(x)$ поверхности $V_p \subset E_n$ рассмотрим квадрику, представляющую собой вторую поляру точки $x \in V_p$ относительно присоединенной поверхности $\widetilde{V}_{q-1}(x)$, заданной уравнением [4]: $\det \| \sum_\alpha \gamma^{ik} b_{kj}^\alpha y^\alpha - \delta_j^i \| = 0$. Уравнение второй поляры точки $x \in V_p$ имеет вид [2]: $a_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta + 2a_{\alpha 0} y^\alpha + a_{00} = 0$, где

$$a_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \gamma^{ik} \gamma^{jl} (b_{ik}^\alpha b_{jl}^\beta - b_{il}^\alpha b_{jk}^\beta + b_{jl}^\alpha b_{ki}^\beta - b_{jk}^\alpha b_{li}^\beta),$$

$$a_{\alpha 0} = -(p-1) \gamma^{ik} b_{ik}^\alpha, \quad a_{00} = p(p-1).$$

Векторы репера $\vec{e}_\alpha$ направим по главным направлениям второй поляры точки x поверхности V_p. Тогда $a_{\alpha\beta} = 0$ $(\alpha \neq \beta)$, т.е.

$$\gamma^{ik} \gamma^{jl} (b_{ik}^\alpha b_{jl}^\beta - b_{il}^\alpha b_{jk}^\beta + b_{jl}^\alpha b_{ik}^\beta - b_{jk}^\alpha b_{li}^\beta). \tag{3}$$

При этом формы ω_β^α стали главными: $\omega_\beta^\alpha = \Lambda_{\beta i}^\alpha \omega^i$. В [2] доказано, что скалярная кривизна поверхности равна $R = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha} = \gamma^{ij} \gamma^{kt} \sum_\alpha (b_{ij}^\alpha b_{kt}^\alpha - b_{ik}^\alpha b_{jt}^\alpha)$. При помощи равенств (I), (2), (3) найдем, что $dR = R_s \omega^s$, где

$$R_s = \gamma^{ij} \gamma^{kt} \sum_\alpha (b_{ij}^\alpha b_{kts}^\alpha + b_{kt}^\alpha b_{ijs}^\alpha - b_{ik}^\alpha b_{jts}^\alpha - b_{jt}^\alpha b_{iks}^\alpha).$$

Средней кривизной поверхности V_p называется длина вектора $\vec{M}$. Обозначим $\frac{1}{p} \gamma^{ij} b_{ij}^\alpha = M^\alpha$ Тогда $M = \sqrt{\sum_\alpha (M^\alpha)^2}$. При помощи равенств (I), (2) найдем, что $dM = M_k \omega^k$, где $M_k = (pM)^{-1} \cdot \sum_\alpha M^\alpha \gamma^{ij} b_{ijk}^\alpha$.

Из выражений для дифференциалов скалярной и средней кривизн следует, что поверхность $V_p \subset E_n$ с параллельной второй фундаментальной формой $(b_{ijk}^\alpha = 0)$ [1] есть поверхность постоянной скалярной и постоянной средней кривизны.

Если поверхность $V_p \subset E_n$ не является поверхностью постоянной скалярной кривизны, то уравнение $dR = 0$ определяет некоторую гиперплоскость в касательной плоскости поверхности V_p в точке x, вдоль которой скалярная кривизна поверхности $V_p \subset E_n$ постоянна. Гиперраспределение Δ_{p-1}^R, вдоль которого скалярная кривизна постоянна, интегрируемо.

Интегральными многообразиями распределения Δ_{p-1}^R будут $(p-1)$-мерные поверхности V_{p-1}, вдоль которых скалярная кривизна R поверхности $V_p \subset E_n$ постоянна. Если подповерхность V_{p-1} не является поверхностью постоянной скалярной кривизны, то на V_{p-1} также определяется $(p-2)$-мерное вполне интегрируемое распределение $\Delta_{p-2}^{R'}$. Продолжая этот процесс, на поверхности $V_p \subset E_n$ можно выделить p ортогональных векторных полей (векторы, ортогональные к Δ_{p-1}^R, $\Delta_{p-2}^{R'}$ и т.д.). Интегральные кривые этих векторных полей определяют на поверхности V_p ортогональную сеть Σ_p^R. Процесс построения этой сети прервется, если на каком-то шаге получим расслоение поверхности $V_p \subset E_n$ на подповерхности постоянной скалярной кривизны. Из вышеизложенного следует

Т е о р е м а 1. Любая поверхность $V_p \subset E_n$ либо является поверхностью постоянной скалярной кривизны, либо расслаивается на поверхности постоянной скалярной кривизны, либо несет сеть Σ_p^R.

Рассмотрим случай, когда гиперраспределения $\Delta_{p-1}^{R'}$ и Δ_{p-1}^M (определяется уравнением $dM = 0$) совпадают. Векторы $\vec{M} = \gamma^{ij} M_j \vec{e}_i$ и $\vec{R} = \gamma^{ij} R_j \vec{e}_i$

являются нормальными векторами к площадкам $\Delta^{M}_{p-1}(x)$ и $\Delta^{R}_{p-1}(x)$ поверхности V_p в точке x. Тогда $\vec{R}=k\vec{H}$, где k – в общем случае функциональный множитель, зависящий от координат $u^1, u^2, \dots, u^p$ точки x на поверхности V_p. При этом $R_i=kM_i$. С учетом этого имеем, что $dR=R_i\omega^i=kM_i\omega^i=kdM$. Отсюда следует, что $\frac{\partial R}{\partial u^i}-k\frac{\partial M}{\partial u^i}=0$. Далее, дифференцируя i-е уравнение по u^j $(i\neq j)$, j-е уравнение по u^i и вычитая, получим $\frac{\partial k}{\partial u^i}\frac{\partial M}{\partial u^j}-\frac{\partial k}{\partial u^j}\frac{\partial M}{\partial u^i}=0$ $(i\neq j)$. Известно, что если $\frac{\mathcal{D}(k,M)}{\mathcal{D}(u^i,u^j)}=0$, то k и M функционально зависимы, т.е. $k=\varphi(M)$ [3]. Таким образом, $dR=\varphi(M)dM$. Интегрируя, получим, что R и M связаны функциональной зависимостью $R=f(M)$. Такие поверхности $V_p\subset E_n$ будем называть поверхностями Вейнгартена, если $k=\mathrm{const}$, то будем обозначать такие поверхности W.

Легко показать, что если $R=f(M)$, то $\vec{R}\parallel\vec{H}$. Таким образом, справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда векторы $\vec{R}$ и $\vec{H}$ коллинеарны.

Если рассмотреть градиенты скалярной и средней кривизны, то справедлива

Т е о р е м а 3. Для того, чтобы поверхность $V_p\subset E_n$ была поверхностью Вейнгартена, необходимо и достаточно, чтобы градиенты скалярной и средней кривизны были коллинеарны.

Пфаффовым производным скалярной и средней кривизн M_i и R_i можно дать следующий геометрический смысл. Рассмотрим поверхности

$$V^M_p:\ \vec{y}_1=\vec{x}+M\vec{e}_{p+1}, \qquad V^R_p:\ \vec{y}_2=\vec{x}+R\vec{e}_{p+1}.$$

Когда точка x описывает на поверхности V_p линию ω^i, то точки y_1 и y_2 на этих поверхностях также описывают линии, направления касательных к которым определяются следующим образом:

$$\vec{a}_i=(\delta^k_i-M\gamma^{kj}b^{p+1}_{ij})\vec{e}_k+M\Lambda^{\tilde\beta}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde\beta}+M_i\vec{e}_{p+1},$$

$$\vec{b}_i=(\delta^k_i-R\gamma^{kj}b^{p+1}_{ij})\vec{e}_k+R\Lambda^{\tilde\beta}_{p+1,i}\vec{e}_{\tilde\beta}+R_i\vec{e}_{p+1} \quad (\tilde\alpha,\tilde\beta=p+2,\dots,p+q).$$

Отсюда следует, что M_i и R_i есть проекции векторов $\vec{a}_i$ и $\vec{b}_i$ на нормаль $(x,\vec{e}_{p+1})$. Обозначим ее через S. При этом справедливы теоремы:

Т е о р е м а 4. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью Вейнгартена тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие:

$$\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_1}{\Pi_{p_S}\vec{a}_1}=\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_2}{\Pi_{p_S}\vec{a}_2}=\dots=\frac{\Pi_{p_S}\vec{b}_p}{\Pi_{p_S}\vec{a}_p}.$$

Т е о р е м а 5. Поверхность $V_p\subset E_n$ будет поверхностью W тогда и только тогда, когда выполняется хотя бы одно из соотношений

$$\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_1}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_1}=\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_2}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_2}=\dots=\frac{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{b}_p}{\Pi_{p\vec{e}_{\tilde\alpha}}\vec{a}_p}.$$

Библиографический список

1. Л у м и с т е Ю.Г., Чакмазян А.В. Нормальная связность и подмногообразия с параллельными нормальными полями в пространстве постоянной кривизны// Проблемы геометрии / ВИНИТИ.М., 1981.Т.12.С.3-30.

2. М о с к а л е н к о Н.И. О второй поляре р-поверхности евклидова пространства//Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1989.Вып.20.С.60.

3. Ф и х т е н г о л ь ц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления.М., 1969.Т.I.

4. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве//Лит.матем.сб./АН Лит.ССР.Вильнюс, 1966.Т.6.№4.С.474-490.

УДК 514.75

$\mathcal{H}_1$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Ю.И.П о п о в
(Калининградский государственный университет)

В работе исследуются регулярные $\mathcal{H}$-распределения [1],[2] специального класса, а именно такие, для которых оснащающее M-распределение скомпоновано (следуя терминологии А.Н.Нордена [3]) из базисного Λ-распределения и L-распределения (распределение ℓ-мерных плоскостей $\Pi_\ell=L$, где $\ell=m-r$), т.е. в каждом центре X $\mathcal{H}$-распределения выполняются соотношения

$$X\subset L\subset M\subset H, \quad [\Lambda;L]=M, \quad \Lambda\cap L=X. \qquad (1)$$

Регулярные $\mathcal{H}$-распределения, для которых выполнены условия (1), обозначим символом $\mathcal{H}(\Lambda,L)$. Репер $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ [1] выберем так, чтобы точки $\{A_p\}\subset\Lambda(A_0)$, $\{A_i\}\subset L(A_0)$, $\{A_\alpha\}\subset H(A_0)$, $X\equiv A_0$. Относительно репера нулевого порядка $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ дифференциальные уравнения $\mathcal{H}(\Lambda,L)$-распределения в проективном пространстве P_n имеют вид:

$$\omega^n_i=M^n_{iK}\omega^K_0, \quad \omega^n_p=\Lambda^n_{pK}\omega^K_0, \quad \omega^n_\alpha=H^n_{\alpha K}\omega^K_0, \qquad (2)$$
$$\omega^i_p=\Lambda^i_{pK}\omega^K_0, \quad \omega^p_i=M^p_{iK}\omega^K_0, \quad \omega^\alpha_p=\Lambda^\alpha_{pK}\omega^K_0, \quad \omega^\alpha_i=M^\alpha_{iK}\omega^K_0.$$

Здесь и в дальнейшем используется следующая схема индексов: $\mathcal{J},\mathcal{K},K=\overline{1,n}$;

$\bar{\mathcal{J}},\bar{\mathcal{K}},\bar{K}=\overline{0,n}$; $u,v,w=\overline{r+1,n-1}$; $p,q,r,s,t=\overline{1,r}$; $\bar p,\bar q,\bar r,\bar s,\bar t=\overline{0,r}$;