УДК 519.217.2

О. В. Воротникова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОНТРОЛИРУЕМОЙ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ ОДНОРОДНЫМ МАРКОВСКИМ ПРОЦЕССОМ

Исследованы сложные системы разбиением множества состояний на подмножества подконтрольных и неподконтрольных состояний. Рассматриваются вероятности событий, связанных с пребыванием случайного процесса в этих множествах, и вероятности перехода из одного подмножества в другое.

Complex systems are investigated by partitioning of set of conditions into subsets of under control and not under control conditions. Probabilities of the events connected with stay of casual process in these sets, and probabilities of transition from one subset to another are considered.

Ключевые слова: вероятность, цепь Маркова, стохастичность, непрерывность, регулярность, контролируемая система.

Key words: probability, Markov chain, stochasticity, continuity, regularity, controllable system.

Пусть $\xi(t), t \in [0, \infty)$ — стохастически непрерывная регулярная однородная во времени цепь Маркова с дискретным пространством состояний X [1]. Назовем систему, эволюцию которой описывает случайный процесс $\xi(t)$ с множеством состояний X, *контролируемой*, если X состоит из непустого множества X_0 подконтрольных состояний и непустого множества X_1 неподконтрольных. *Подконтрольным состоянием* будем называть такое состояние, которое соответствует заранее установленным условиям $X = X_0 \cup X_1$, $X_0 \cap X_1 = \varnothing$, $X_0 \neq \varnothing$, $X_1 \neq \varnothing$.

Оценим переходные вероятности того, что система, находясь в множестве $X_i, i = 0, 1,$ через время τ окажется в этом же множестве или перейдет из одного множества в другое. Пусть однородный марковский процесс $\xi(t)$ задан инфинитезимальной матрицей $Q = \left\| q_{ij}, (i, j) \in X \times X \right\|$.

Для простоты возьмем множество подконтрольных состояний $X_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и неподконтрольных — $X_1 = \{m, m+1, \ldots, n\}$. Введем матрицы: локальные переходов из X_i в X_j $Q^{ij} = \left\| q_{\alpha\beta}, (\alpha, \beta) \in X_i \times X_j \right\|$, $i, j = 0, 1;$ перехода из X_i в X_j за время τ $P_{ij}(\tau) = \left\| p_{\alpha\beta}(\tau), (\alpha, \beta) \in X_i \times X_j \right\|$, $p_{\alpha\beta}(\tau) = P\{\xi(\tau) = \beta / \xi(0) = \alpha\}$, $i, j = 0, 1;$ переходов за время τ внутри множества $X_j, j = 0, 1,$ $\Pi_j(\tau) = \left\| \pi^j_{\alpha\beta}(\tau), (\alpha, \beta) \in X_j^2 \right\|$,

$$\pi^j_{\alpha\beta}(\tau) = P\{\xi(\tau) = \beta,\ \xi(u) \in X_j,\ 0 \leqslant u \leqslant \tau / \xi(0) = \alpha, \alpha \in X_j\}.$$

Тогда инфинитезимальная матрица $Q = \begin{Vmatrix} Q^{00} & Q^{01} \\ Q^{10} & Q^{11} \end{Vmatrix}$ и матрица переходов внутри $X_j, j = 0, 1,$ удовлетворяет системе Колмогорова [1]:

$$\begin{cases} \dfrac{d\Pi_j(\tau)}{d\tau} = \Pi_j(\tau) Q^{jj}, \\ \dfrac{d\Pi_j(\tau)}{d\tau} = Q^{jj} \Pi_j(\tau), \end{cases} \quad \Pi_j(0) = E_j = \left\| \delta_{\alpha\beta} \right\|, (\alpha, \beta) \in X_j^2,$$

$$\Pi_j(\tau) = \exp(\tau Q^{jj}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau Q^{jj})^k}{k!}. \qquad (1)$$

Матрица вероятностей переходов [2] за время τ из X_0 в X_0 с возможным промежуточным выходом в $\tilde{O}_1$ является решением уравнения Вольтерра 2-го рода

$$P_{00}(\tau) = \Pi_0(\tau) + \int_0^{\tau} P_{00}(u) L^0(\tau - u) du, \quad L^0(\tau) = Q^{01} \int_0^{\tau} \Pi_1(\tau) Q^{10} \Pi_0(\tau - u) du. \qquad (2)$$

Матрицы вероятностей перехода из X_i в X_j за время τ имеют вид:

$$P_{01}(\tau)=\int_0^\tau P_{00}(u)Q^{01}\Pi_1(\tau-u)du, \tag{3}$$

$$P_{10}(\tau)=\int_0^\tau P_{11}(u)Q^{10}\Pi_0\left(\tau-u\right)du, \tag{4}$$

$$P_{11}(\tau)=\Pi_1(\tau)+\int_0^\tau P_{11}(u)L^1\left(\tau-u\right)du, \tag{5}$$

$$L^1(\tau)=Q^{10}\int_0^\tau \Pi_0(\tau)Q^{01}\Pi_1(\tau-u)du. \tag{6}$$

Итак, матрица переходных вероятностей $P_{00}(\tau)$ из X_0 в X_0 — это решение уравнения Вольтерра 2-го рода. Изучим более подробно решение этого уравнения с помощью преобразования Лапласа. Введем преобразование Лапласа [3] от матриц переходных вероятностей

$$\tilde{P}_{0j}(z)=\int_0^\infty P_{0j}(\tau)e^{-z\tau}d\tau,\ \ \tilde{\Pi}_j(z)=\int_0^\infty \Pi_j(\tau)e^{-z\tau}d\tau,\ j=0,1,\ \tilde{L}^i(z)=\int_0^\infty L^i(\tau)e^{-z\tau}d\tau.$$

Перейдем в (2—6) к преобразованиям Лапласа. Получим:

$$\tilde{P}_{00}(z)=\tilde{\Pi}_0(z)+\tilde{P}_{00}(z)\tilde{L}^0(z),\ \ \tilde{P}_{01}(z)=\tilde{P}_{00}(z)Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z),$$

$$\tilde{P}_{10}(z)=\tilde{\Pi}_1(z)\left(E_1-Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)\right)^{-1}Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z),$$

$$\tilde{P}_{11}(z)=\left(E_1-Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)\right)^{-1}\tilde{\Pi}_1(z),$$

где из соотношения (3) имеем: $\tilde{L}^0(z)=Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z).$ Тогда

$$\tilde{P}_{00}(z)=\tilde{\Pi}_0(z)\left(E_0-Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)\right)^{-1}, \tag{7}$$

$$\tilde{P}_{01}(z)=\tilde{\Pi}_0(z)\left(E_0-Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)\right)^{-1}Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z), \tag{8}$$

$$\tilde{P}_{10}(z)=\tilde{\Pi}_1(z)\left(E_1-Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)\right)^{-1}Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z), \tag{9}$$

$$\tilde{P}_{11}(z)=\left(E_1-Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z)Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z)\right)^{-1}\tilde{\Pi}_1, \tag{10}$$

где $E_i=\left\|\delta_{\alpha\beta}\right\|;\ (\alpha,\beta)\in X_i^2;\ \delta_{\alpha\beta}=\begin{cases}1, \alpha=\beta,\\ 0, \alpha\neq\beta.\end{cases}$

В формулах (7—10) обратные матрицы есть при конечности множества подконтрольных состояний X_0, при счетности X_0 обратимость — это обратимость в алгебре операторов на пространстве ограниченных последовательностей. Преобразования Лапласа (7—10) однозначно (с точностью до множества меры 0) определяют матрицы переходных вероятностей $P_{00}(\tau)$, $P_{01}(\tau)$, $P_{10}(\tau)$, $P_{11}(\tau)$, которые находятся с помощью теорем обращения типа Меллина, то есть для $P_{00}(\tau)$, $P_{01}(\tau)$:

$$P_{0j}(\tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_{cj}-i\infty}^{\sigma_{cj}+i\infty}\tilde{P}_{0j}(z)e^{\tau z}dz,\ t\in[0,\infty),\ \sigma_{0j}>\sigma_{aj},\ j=0,1,$$

где σ_{aj} — абсцисса абсолютной сходимости функции $\tilde{P}_{0j}(z)$ $(\sigma=\operatorname{Re}z)$, а $\tilde{P}_{0j}(z)$ вычисляются по формулам (7, 8). Интегрирование в комплексной плоскости $z=\operatorname{Re}z+i\operatorname{Im}z$ идет по прямой, параллельной мнимой оси и лежащей справа от точки σ_{aj}. Обычно такой интеграл вычисляют по теореме Коши о вычетах [3] к вычислению интеграла по замкнутому контуру. Замкнутый контур — граница полукруга достаточно большого радиуса с центром в $z_{cj}=(\sigma_{cj},0)$. Если радиус стремится к ∞, а интеграл по границе — к 0, то предел интеграла по всему контуру равен искомому интегралу. Для установления равенства 0 интеграла по границе показывают, что $\tilde{P}_{0j}(z)$ удовлетворяют условиям леммы Жордана.

Рассмотрим примеры контролируемых систем.

1. Контролируемая система, функционирование которой описывает пуассоновский процесс. Пусть случайный процесс $\xi(t) \in X = \{0, 1, \ldots\}$, описывающий контролируемую систему, представляет собой однородный пуассоновский процесс [4]. Тогда матрица локальных переходных плотностей имеет вид $Q = \begin{Vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}$, где $0 < \lambda < \infty$ — постоянное число, равное интенсивности наступления некоторого события.

Пусть множества $X_0 = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ и $X_1 = \{m, m+1, \ldots\}$, тогда матрицы локальных переходов из X_i в X_j имеют вид

$$\underset{\infty\times\infty}{Q^{11}} = \begin{Vmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & -\lambda & \lambda & \cdots \\ 0 & 0 & -\lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}, \quad \underset{m\times\infty}{Q^{01}} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \lambda & 0 & \cdots \end{Vmatrix}, \quad \underset{\infty\times m}{Q^{10}} = \begin{Vmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{Vmatrix}.$$

Найдем матрицы вероятностей перехода без выхода из своего множества состояний по формуле (1):

$$\Pi_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} \begin{Vmatrix} 1 & \lambda\tau & \frac{(\tau\lambda)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\tau\lambda)^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \lambda\tau & \cdots & \frac{(\tau\lambda)^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}, \quad \Pi_1(\tau) = e^{-\lambda\tau} \begin{Vmatrix} 1 & \lambda\tau & \frac{(\tau\lambda)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 1 & \lambda\tau & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Используем прямое преобразование Лапласа:

$$\tilde{\Pi}_0(z) = \frac{1}{\lambda+z} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \frac{\lambda^2}{(\lambda+z)^2} & \cdots & \frac{\lambda^{m-1}}{(\lambda+z)^{m-1}} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \cdots & \frac{\lambda^{m-2}}{(\lambda+z)^{m-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}, \quad \tilde{\Pi}_1(z) = \frac{1}{\lambda+z} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \frac{\lambda^2}{(\lambda+z)^2} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Тогда $\tilde{P}_{00}(z) = \frac{1}{\lambda+z} \begin{Vmatrix} 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \frac{\lambda^2}{(\lambda+z)^2} & \cdots & \frac{\lambda^{m-1}}{(\lambda+z)^{m-1}} \\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \cdots & \frac{\lambda^{m-2}}{(\lambda+z)^{m-2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}.$

Учитывая обратные преобразования Лапласа, получаем:

$$P_{00}(z) = e^{-\lambda\tau} \begin{Vmatrix} 1 & \lambda\tau & \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} & \cdots & \frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} \\ 0 & 1 & \lambda\tau & \cdots & \frac{(\lambda\tau)^{m-2}}{(m-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{Vmatrix}. \quad (11)$$

Найдем преобразование Лапласа (8) от матрицы переходных вероятностей из множества состояний X_0 во множество состояний X_1:

$$\tilde{\mathrm{P}}_{01}(z)=\frac{\lambda}{(\lambda+z)^2}\begin{Vmatrix}\frac{\lambda^{m-1}}{(\lambda+z)^{m-1}} & \frac{\lambda^{m}}{(\lambda+z)^{m}} & \frac{\lambda^{m+1}}{(\lambda+z)^{m+1}} & \cdots \\ \frac{\lambda^{m-2}}{(\lambda+z)^{m-2}} & \frac{\lambda^{m-1}}{(\lambda+z)^{m-1}} & \frac{\lambda^{m}}{(\lambda+z)^{m}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \frac{\lambda^2}{(\lambda+z)^2} & \cdots \end{Vmatrix}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к $\tilde{P}_{01}$, получим:

$$P_{01}(\tau)=\lambda\tau e^{-\lambda\tau}\begin{Vmatrix}\frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{(\lambda\tau)^{m}}{(m)!} & \frac{(\lambda\tau)^{m+1}}{(m+1)!} & \cdots \\ \frac{(\lambda\tau)^{m-2}}{(m-2)!} & \frac{(\lambda\tau)^{m-1}}{(m-1)!} & \frac{(\lambda\tau)^{m}}{(m)!} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 1 & \lambda\tau & \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} & \cdots \end{Vmatrix}. \qquad (12)$$

Найдем вероятность перехода из неподконтрольного состояния в неподконтрольное, учитывая (10), получим:

$$\tilde{P}_{11}(z)=\frac{1}{\lambda+z}\begin{Vmatrix}1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \frac{\lambda^2}{(\lambda+z)^2} & \cdots \\ 0 & 1 & \frac{\lambda}{\lambda+z} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, получим:

$$P_{11}(\tau)=e^{-\lambda\tau}\begin{Vmatrix}1 & \lambda\tau & \frac{(\lambda\tau)^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 1 & \lambda\tau & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{Vmatrix}. \qquad (13)$$

Согласно (9) вероятность перехода из неподконтрольного состояния в подконтрольное $\tilde{P}_{10}(z)=O,$ где O — нулевая матрица. Тогда

$$P_{10}(\tau)=\mathrm{O}. \qquad (14)$$

Итак, матрицы (11—14) задают переходные вероятности из множества подконтрольных состояний X_0 в множества X_0 и X_1 и обратно.

2. Контролируемая система обработки информации.

Рис. Система обработки информации

Рассмотрим систему обработки информации, структурная схема которой изображена на рисунке.

Система обработки информации содержит источник входных сигналов (ИВС), подлежащих обработке на специализированном вычислительном устройстве (СВУ); канал передачи информации (КПИ), предназначенный для передачи входных сигналов от источника к СВУ.

Предположим, что ИВС в любой момент времени способен выдать информацию в КПИ. Если КПИ разблокирован, то он принимает очередное входное слово от источника и передает его в СВУ, где происходит его обработка. В случае, если СВУ занят обработкой предыдущего слова, КПИ блокируется и хранит слово до тех пор, пока СВУ не станет свободным. Когда СВУ освобождается, КПИ передает ему слово, становится разблокированным и готов к принятию нового слова.

Пусть время передачи сигналов по КПИ — непрерывная случайная величина, подчиненная показательному закону распределения [1]. Время обработки сигналов в СВУ также непрерывно и подчиняется показательному закону. Итак, система может принимать три состояния:

$\overset{\circ}{A}_0$ — СВУ простаивает, КПИ находится в режиме работы;

$\overset{\circ}{A}_1$ — СВУ и КПИ находятся в режиме работы;

$\overset{\circ}{A}_2$ — СВУ работает, КПИ заблокирован.

Пусть $\xi(t) \in X = \{0, 1, 2\}$ — стохастически непрерывный регулярный случайный процесс размножения и гибели [4] с конечным множеством состояний, то есть однородная цепь Маркова со свойствами:

$$P\{\xi(t+h) = k / \xi(t) = i\} = \begin{cases} \lambda_i h + o(h), & k = i+1,\, i = 0, 1, \\ \mu_i h + o(h), & k = i-1,\, i = 1, 2, \\ 1-(\lambda_i + \mu_i)h + o(h), & k = i,\, i = 0, 1, 2, \\ o(h), & k \neq i,\, k \neq i. \end{cases}$$

Для этого процесса матрица локальных переходных вероятностей

$$Q = \begin{Vmatrix} -\lambda_0 & \lambda_0 & 0 \\ \mu_1 & -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 \\ 0 & \mu_2 & -\mu_2 \end{Vmatrix},\ 0 < \lambda_k < \infty,\ k = 0, 1;\ 0 < \mu_k < \infty,\ k = 0, 1, 2.$$

Пусть множество подконтрольных состояний $X_0 = \{0\}$, тогда матрицы локальных переходных вероятностей имеют вид

$$Q^{00} = \|-\lambda_0\|,\ Q^{01} = \|\lambda_0 \quad 0\|,\ Q^{10} = \begin{Vmatrix} \mu_1 \\ 0 \end{Vmatrix},\ Q^{11} = \begin{Vmatrix} -(\lambda_1+\mu_1) & \lambda_1 \\ \mu_2 & -\mu_2 \end{Vmatrix}.$$

По формуле (1) имеем: $\Pi_0(\tau) = \|e^{-\lambda_0\tau}\|$, $\Pi_1(\tau) = \exp\,(\tau Q^{(11)}) = \|\pi_{ij}^{(1)}(\tau)\|$.

Элементы матрицы $\Pi_1(\tau)$ находятся как решение системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений [5]

$$\pi_{ij}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{2} T_{ij}\,(\tau Q^{(11)}) e^{x_k\tau},\ \ i,\, j = 1,2,$$

где x_k — собственные значения матрицы Q^{11};

$$x_{1,2} = 0,5\left(-(\lambda_1+\mu_1+\mu_2) \pm \sqrt{(\lambda_1+\mu_1+\mu_2)^2 - 4\mu_1\mu_2}\right);$$

$T_{ij}(x_k)$ — собственные векторы матрицы Q^{11}, соответствующие собственным значениям x_k. Итак, элементы матрицы $\Pi_1(\tau)$ имеют вид

$$\pi_{11}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\mu_2}{x_k+\lambda_1+\mu_1+\mu_2} e^{x_k\tau} = \sum_{k=1}^{2} T_{11}^{(1)}(x_k) e^{x_k\tau},\ \ \pi_{12}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{2} \frac{\mu_2(x_k+\lambda_1+\mu_1)}{x_k+\lambda_1+\mu_1+\mu_2} e^{x_k\tau} = \sum_{k=1}^{2} T_{12}^{(1)}(x_k) e^{x_k\tau},$$

$$\pi_{21}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(x_k+\lambda_1+\mu_1)}{x_k+\lambda_1+\mu_1+\mu_2} e^{x_k\tau} = \sum_{k=1}^{2} T_{21}^{(1)}(x_k) e^{x_k\tau},\ \ \pi_{22}^{(1)}(\tau) = \sum_{k=1}^{2} \frac{(x_k+\lambda_1+\mu_1)^2}{x_k+\lambda_1+\mu_1+\mu_2} e^{x_k\tau} = \sum_{k=1}^{2} T_{22}^{(1)}(x_k) e^{x_k\tau}.$$

Введем преобразования Лапласа

$$\tilde{\Pi}_0(z) = \frac{1}{z+\lambda_0},\ \ \tilde{\pi}_{ij}^{(1)}(z) = \int_0^\infty \left(\sum_{k=1}^{2} T_{ij}^{(1)}(x_k) e^{x_k\tau}\right) e^{-z\tau} d\tau = \sum_{k=1}^{2} T_{ij}^{(1)}(x_k) \frac{1}{z-x_k}$$

и вычислим произведения матриц

$$Q^{10}\tilde{\Pi}_0(z) = \begin{Vmatrix} \dfrac{\mu_1}{z+\lambda_0} \\ 0 \end{Vmatrix},\ \ Q^{01}\tilde{\Pi}_1(z) = \left\| \sum_{k=1}^{2} T_{1j}^{(2)}(x_k) \frac{1}{z-x_k} \right\|_{j=1,2}.$$

Тогда по формулам (7) и (8) получаем

$$\tilde{P}_{00}(z)=\left(z+\lambda_0\left(1-\mu_1\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{11}^{(2)}(x_k)}{z-x_k}\right)\right)^{-1},\ \tilde{P}_{01}(z)=\lambda_0\left(z+\lambda_0\left(1-\mu_1\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{11}^{(2)}(x_k)}{z-x_k}\right)\right)^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{2}\frac{T_{1j}^{(2)}(x_k)}{z-x_k}\right\|_{j=1,2}.$$

Обратим преобразования Лапласа и получим

$$P_{01}(\tau)=\lambda_0 P_{00}(\tau)*\left\|\sum_{k=1}^{2}T_{1j}^{(2)}(x_k)e^{x_k\tau}\right\|_{j=1,2}=\left\|\lambda_0 P_{00}(\tau)*\sum_{k=1}^{2}T_{1j}^{(2)}(x_k)e^{x_k\tau}\right\|_{j=1,2},$$

где $P_{00}(\tau)$ находится обращением преобразования Лапласа $\tilde{P}_{00}(z)$, и $P_{10}(\tau)=P_{11}(\tau)*\left\|\begin{matrix}\mu_1 e^{-\lambda_0\tau}\\ 0\end{matrix}\right\|$, где $P_{11}(\tau)$ находится обращением (10).

При заданных числовых значениях параметров λ, μ, пользуясь полученными формулами, можно найти вероятности перехода $P_{00}(\tau)$, $P_{01}(\tau)$, $P_{10}(\tau)$, $P_{11}(\tau)$ из одного подмножества состояний в другое.

Список литературы

1. *Ширяев А. Н.* Вероятность: в 2 кн. 3-е изд. М., 2004.

2. *Даниленко Е. Л., Воротникова О. В.* Оценка переходных вероятностей марковских моделей некоторых контролируемых систем // Стохастические и детерминированные модели сложных систем. Новосибирск, 1988. С. 51—65.

3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Высшая математика. Т. 3. М., 2003.

4. *Лаговский А. Ф., Воротникова О. В.* Теория случайных процессов. Калининград, 2001.

5. *Климов Г. П.* Стохастические системы обслуживания. М., 1966.

Об авторе

Ольга Владимировна Воротникова — ст. преп., РГУ им. И. Канта, e-mail: vorotnikova1@ narod.ru

Author

Olga Vorotnikova — high instructor, IKSUR, e-mail: vorotnikova1@ narod.ru