Совокупность точек пространства P_{k-1}, которым соответствует гиперплоскость (2.II), образуют основную [I] гиперквадрику в проективном пространстве P_{k-1}:

$$u_{\hat{a}\hat{b}} x^{\hat{a}} x^{\hat{b}} = 0. \qquad (2.13)$$

Литература

I. Ивлев Е.Т., Исабеков М.Б., К проективной геометрической интерпретации некоторых образов, определяемых двухвалентными тензорами. Материалы 3-й научн.конф. по математике и механике. Вып.I, Изд-во Томского ун-та, I973, 50-52.

2. Малаховский В.С., Многообразия алгебраических элементов в n-мерном проективном пространстве. "Геом.сб.", вып.3, Труды Томского ун-та, т.I68, 28-42.

3. Овчинников В.М., Дифференцируемое отображение поверхности в многообразие квадратичных элементов. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2 (Труды Калининградского ун-та), I97I, 38-42.

4. Остиану Н.М., Об инвариантном оснащении семейства многомерных плоскостей в проективном пространстве. Труды геом. семинара, т.2, М., ВИНИТИ АН СССР, I969, 247-262.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Попов Ю.И., Мишенина Т.И.

ИНВАРИАНТНОЕ ОСНАЩЕНИЕ РАСПАДАЮЩЕЙСЯ $(n-2)$-МЕРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ CH^{τ}_{n-2} РАНГА τ МНОГОМЕРНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА P_n.

Рассмотрим в n-мерном проективном пространстве P_n вырожденную $(n-2)$-мерную гиперполосу H^{τ}_{n-2} ранга τ [7], т.е. такую гиперполосу, семейство касательных гиперплоскостей которой зависит от τ существенных параметров $(\tau<n-2)$ Каждая касательная гиперплоскость касается базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы H^{τ}_{n-2} по $(n-\tau-2)$-мерной плоскости E_S (где $S=n-\tau-2$), являющейся её плоской образующей. В данной работе мы рассматриваем гиперполосы H^{τ}_{n-2} с такими базисными поверхностями V^{τ}_{n-2}, вдоль плоских образующих E_S которых касательная плоскость T_{n-2} постоянна.

Вырожденную гиперполосу назовем центрированной, если в каждой её плоской образующей E_S задана некоторая точка, называемая центром данной плоской образующей. Центрирование называется нормальным [2], если множество всех центров плоских образующих является τ-мерной поверхностью

V_τ, касательные τ-плоскости E_τ которой не содержат общих направлений с соответствующими плоскими образующими E_s базисной поверхности V^τ_{n-2} гиперполосы H^τ_{n-2}.

В работе исследуются вырожденные распадающиеся нормально центрированные $(n-2)$-мерные гиперполосы CH^τ_{n-2} ранга τ проективного пространства P_n.

Вырожденную гиперполосу CH^τ_{n-2} назовем распадающейся, если гиперповерхность V^τ_{n-1}, огибающая главные касательные гиперплоскости τ гиперполосы CH^τ_{n-2}, распадается на две тангенциально вырожденные поверхности: V^τ_{n-2} и $V^\tau_{\tau+1}$ с общей направляющей поверхностью V_τ (V_τ - множество всех центров плоских образующих E_s поверхности V_{n-2}).

Для вырожденной распадающейся гиперполосы CH^τ_{n-2} построено инвариантное оснащение, внутренним образом связанное с этой гиперполосой, и дана геометрическая интерпретация объектов, характеризующих полученное оснащение. Рассмотрены некоторые частные классы распадающихся гиперполос CH^τ_{n-2} (конические и плоские гиперполосы).

Работа выполнена теоретико-групповым методом Лаптева Г.Ф. [5].

Обозначения и замечания:

I. Во всей работе мы придерживаемся следующей схемы использования индексов:

$$p, q, t, s, f, v = 1, 2, \ldots, \tau; \quad i, j, k, \ell = \tau+1, \ldots, n-2;$$

$$\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L} = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

2. При операции дифференцирования широко используем оператор ∇:

$$\nabla B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w} = dB^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w} - B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1} - \ldots - B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{J}}\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_w} +$$

$$+ B^{\mathcal{J}\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{I}_u}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{I}_1}_{\mathcal{J}} + \ldots + B^{\mathcal{I}_1\mathcal{I}_2\ldots\mathcal{J}}_{\mathcal{K}_1\mathcal{K}_2\ldots\mathcal{K}_w}\omega^{\mathcal{I}_u}_{\mathcal{J}}, \quad u, w = 1, 2 \ldots$$

3. Символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм $\omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$ при фиксированных главных параметрах через $\pi^{\mathcal{J}}_{\mathcal{K}}$. В этом случае оператор ∇ обозначается символом ∇_δ.

4. Символические обозначения вида

$$[A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}] \equiv [A_u] \quad \text{и} \quad [\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}] \equiv [\tau^w]$$

обозначают соответственно плоскость E_{u-1}, натянутую на линейно независимые точки $A_{\mathcal{I}_1}, A_{\mathcal{I}_2}, \ldots, A_{\mathcal{I}_u}$ и плоскость E_{n-w}, являющуюся пересечением линейно независимых гиперплоскостей $\tau^{\mathcal{I}_1}, \tau^{\mathcal{I}_2}, \ldots, \tau^{\mathcal{I}_w}$.

5. Все исследования, проведенные в настоящей работе, носят локальный характер. Изучаемые многообразия предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми.

§I. Задание распадающейся гиперполосы CH^τ_{n-2} в проективном пространстве P_n.

В проективном пространстве P_n наряду с точечным подвижным репером $\{A_{\mathcal{J}}\}$ рассмотрим двойственный ему репер

$\{\tau^{\varkappa}\}$, элементы которого $\tau^{\varkappa}$ являются гранями репера $\{A_{\mathcal{J}}\}$. Имеем:

$$(A_{\mathcal{J}}, \tau^{\varkappa}) = \delta^{\varkappa}_{\mathcal{J}}. \qquad (1.1)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений данных реперов имеют следующий вид:

$$dA_{\mathcal{J}} = \omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} A_{\varkappa}, \quad d\tau^{\mathcal{J}} = -\omega^{\mathcal{J}}_{\varkappa}\tau^{\varkappa}, \qquad (1.2)$$

где формы $\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}}$ имеют проективную структуру:

$$d\omega^{\varkappa}_{\mathcal{J}} = \omega^{\mathcal{I}}_{\mathcal{J}} \wedge \omega^{\varkappa}_{\mathcal{I}}, \qquad (1.3)$$

$$\sum_{\mathcal{J}} \omega^{\mathcal{J}}_{\mathcal{J}} = 0. \qquad (1.4)$$

Присоединим к изучаемому образу CH^{τ}_{n-2} подвижной репер, полагая $A_0 = A$, $\tau^n = \tau$, где A -центр плоской образующей E, а τ -главная касательная гиперплоскость гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Для гиперполосы CH^{τ}_{n-2} имеем:

$$(dA_0, \tau^n) = (A_0, d\tau^n) = 0, \qquad (1.5)$$

поэтому в репере нулевого порядка

$$\omega^n_0 = 0. \qquad (1.6)$$

Элемент (A_0, τ^n) гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, зависит от τ существенных параметров $\{u^p\}$, которые назовем главными. При изменении главных параметров $\{u^p\}$ точка A_0 описывает τ-мерную поверхность V_{τ} —поверхность центров плоских образующих E_s базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы, а семейство главных касательных гиперплоскостей τ^n огибает некоторую тангенциально вырожденную гиперповерхность V^{τ}_{n-1}.

Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1} являются характеристиками вырожденной гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, причем $E_s \subset E_{n-\tau-1}$.

Специализируем подвижной репер, поместив точки $\{A_p\}$ в касательной плоскости T_{τ} поверхности V_{τ}; точки $\{A_i\}$ - в плоскости E_s; точку A_{n-1} в характеристическую плоскость $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, а точка A_n пусть занимает произвольное положение, образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_{n-1}\}$ проективный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ пространства P_n. В этом репере, учитывая (I.I) и (I.2), имеем:

$$\omega^i_0 = 0, \quad (1.7) \qquad \omega^{n-1}_0 = 0, \quad (1.8)$$

$$\omega^n_i = 0, \quad (1.9) \qquad \omega^n_{n-1} = 0. \quad (1.10)$$

Уравнения инфинитезимальных перемещений плоского элемента (A_0, τ^n) гиперполосы CH^{τ}_{n-2} в силу (I.6)-(I.10) примут вид:

$$\begin{aligned} dA_0 &= \omega^0_0 A_0 + \omega^p_0 A_p, \\ d\alpha^n &= -\omega^n_p \tau^p - \omega^n_n \tau^n. \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Следовательно формы $\omega^p = \omega^p_0$ определяют перемещение точки A_0 по поверхности V_{τ} и поэтому являются независимыми линейными комбинациями дифференциалов du^p главных параметров-базисными формами гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, отнесенной к подвижному точечному реперу $\{A_{\mathcal{J}}\}$. Аналогично, формы ω^n_p определяют перемещение гиперплоскости τ^n и, следовательно, являются базисными формами гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, отнесенной к подвижному тангенциальному реперу $\{\tau^{\mathcal{J}}\}$.

Условие постоянства касательной плоскости T_{n-2} вдоль плоской образующей E_s базисной поверхности V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2} и условие постоянства касательной плоскости T_{r+1} вдоль образующей $E_1=[A_0, A_{n-1}]$ поверхности V^{r}_{r+1} запишутся соответственно в виде:

$$\omega^{n-1}_{i} = 0, \quad (1.12) \qquad \omega^{i}_{n-1} = 0. \quad (1.13)$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (I.6)-(I.10) и применяя лемму Картана, находим

$$\omega^{n}_{p} = a_{pq}\,\omega^{q}, \quad a_{pq} = a_{qp}, \quad a = \det\|a_{pq}\| \neq 0, \tag{1.14}$$

$$\omega^{p}_{i} = b^{pt}_{i}\,\omega^{n}_{t} = a^{p}_{iq}\,\omega^{q}, \tag{1.15}$$

$$\omega^{n-1}_{p} = b^{n-1}_{pq}\,\omega^{q} = a^{n-1,q}_{p}\,\omega^{n}_{q}, \tag{1.16}$$

$$\omega^{i}_{p} = b^{i}_{pq}\,\omega^{q} = a^{iq}_{p}\,\omega^{n}_{q}, \tag{1.17}$$

$$\omega^{p}_{n-1} = b^{pq}_{n-1}\,\omega^{n}_{q} = a^{p}_{n-1,q}\,\omega^{q}, \tag{1.18}$$

где величины b^{i}_{pq}, b^{pq}_{i}, b^{n-1}_{pq}, b^{pq}_{n-1} симметричны по индексам p,q. Кроме того, коэффициенты уравнений Пфаффа (I.15)-(I.18) связаны следующими алгебраическими соотношениями

$$a^{p}_{iq}\,b^{n-1}_{pt} = a^{p}_{it}\,b^{n-1}_{pq}, \tag{1.19}$$

$$a^{p}_{n-1,q}\,b^{i}_{pt} = a^{p}_{n-1,t}\,b^{i}_{pq}. \tag{1.20}$$

Действительно, соотношения (I.19)-(I.20) вытекают из продолжения уравнений (I.12)-(I.13) с учетом (I.15)-(I.18).

Пфаффовы уравнения (I.6)-(I.10), (I12), (I.13), (I.15)-

(I.18), и конечные соотношения (I.19), (I.20) определяют распадающуюся гиперполосу CH^{r}_{n-2} ранга r проективного пространства P_n. При этом уравнения (I.6)-(I.8) задают поверхность центров V_r плоских образующих E_s базисной поверхности V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2}, уравнения (I.6), (I.7), (I.10), (I.13), (I.17), (I.18), (I.20) определяют тангенциально вырожденную поверхность V^{r}_{r+1}, а уравнения (I.6), (I.8) (I.9), (I.12), (I.15), (I.16), (I.19) определяют базисную поверхность V^{r}_{n-2} гиперполосы CH^{r}_{n-2}.

Продолжая уравнения (I.14)-(I.18), находим

$$\nabla a_{pq} = -a_{pq}(\omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) + a_{pqt}\,\omega^{t}, \tag{1.21}$$

$$\nabla b^{pq}_{i} = b^{pq}_{i}\,\omega^{n}_{n} + a^{pq}\,\omega^{0}_{i} - b^{pqt}_{i}\,\omega^{n}_{t}, \tag{1.22}$$

$$\nabla b^{n-1}_{pq} = -b^{n-1}_{pq}\,\omega^{0}_{0} - a_{pq}\,\omega^{n-1}_{n} + b^{n-1}_{pqt}\,\omega^{t}, \tag{1.23}$$

$$\nabla b^{i}_{pq} = -b^{i}_{pq}\,\omega^{0}_{0} - a_{pq}\,\omega^{i}_{n} + b^{i}_{pqt}\,\omega^{t}, \tag{1.24}$$

$$\nabla b^{pq}_{n-1} = b^{pq}_{n-1}\,\omega^{0}_{0} + a^{pq}\,\omega^{0}_{n-1} - b^{pqt}_{n-1}\,\omega^{n}_{t}, \tag{1.25}$$

где величины a_{pqt}, b^{pqt}_{i}, b^{n-1}_{pqt}, b^{i}_{pqt}, b^{pqt}_{n-1} симметричны по индексам p, q, t.

Рассмотрим матрицу $\|a^{pq}\|$, обратную матрице $\|a_{pq}\|$:

$$a_{pq}\,a^{qt} = \delta^{t}_{p}. \tag{1.26}$$

Дифференцируя эти соотношения с учетом (I.21), получим

$$\nabla a^{pq} = a^{pq}(\omega^{0}_{0} + \omega^{n}_{n}) - a^{pqt}\,\omega^{n}_{t}. \tag{1.27}$$

где a^{pqt} так же симметричны по индексам p, q, t.

Из уравнений (I.21) и (I.27) следует, что величины a_{pq} и a^{pq} являются относительными тензорами-основные двухвалентные тензоры распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Системы величин

$$\Gamma_2 = \{ a_{pq}, a^{pq}, b^{pq}_i, b^i_{pq}, b^{n-1}_{pq}, b^{pq}_{n-1} \}$$

и

$$\Gamma_3 = \{ \Gamma_2, a_{pqt}, a^{pqt}, b^{pqt}_i, b^i_{pqt}, b^{n-1}_{pqt}, b^{pqt}_{n-1} \}$$

образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Дальнейшее продолжение системы (I.21)-(I.25), (I.27) вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2}. Таким образом получена последовательность фундаментальных геометрических объектов распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

§2. Построение инвариантного оснащения распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

I. Присоединим к распадающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2} инвариантный репер, а так же инвариантные нормали первого и второго рода в смысле Нордена А.П. [6], связанные внутренним образом с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}. Инвариантную нормаль второго рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2} -плоскость $E_{n-3} \equiv [A_p, A_i]$ определим точками

$$M_p = A_p + x_p A_o, \qquad M_i = A_i + x_i A_o,$$

где

$$\nabla_\delta x_p = - x_p \pi^o_o - \pi^o_p, \tag{2.1}$$

$$\nabla_\delta x_i = - x_i \pi^o_o - \pi^o_i. \tag{2.2}$$

Точки M_p определяют инвариантную плоскость $E_{\tau-1}$, лежащую в касательной плоскости T_τ поверхности V_τ, а точки M_i определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau-3} \subset E_s$.

Инвариантную нормаль первого рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2} - плоскость $E_2 \equiv [A_o, A_{n-1}, A_n]$ —зададим как пересечение гиперплоскостей

$$\sigma^p = \tau^p + y^p \tau^n, \qquad \sigma^i = \tau^i + y^i \tau^n,$$

где

$$\nabla_\delta y^p = y^p \pi^n_n + \pi^p_n, \tag{2.3}$$

$$\nabla_\delta y^i = y^i \pi^n_n + \pi^i_n. \tag{2.4}$$

Гиперплоскости σ^p определяют инвариантную плоскость $E_{n-\tau}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую плоскую образующую $E_{n-\tau-1} \equiv [A_o, A_i]$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, огибаемой главными касательными гиперплоскостями τ^n гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Гиперплоскости σ^i определяют инвариантную плоскость $E_{\tau+2}$, не лежащую в гиперплоскости τ^n и содержащую касательную плоскость $T_{\tau+1}$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

Кроме основных элементов оснащения гиперполосы CH^{τ}_{n-2} - её нормалей первого и второго рода-определим ещё инвариантную гиперплоскость

$$\sigma^{n-1} = \tau^{n-1} + y^{n-1}\tau^n,$$

проходящую через касательную плоскость T_{n-2} базисной поверхности V^{τ}_{n-2} и не совпадающую с гиперплоскостью τ^n и точку

$$M_{n-1} = A_{n-1} + x_{n-1} A_0,$$

принадлежащую прямолинейной образующей $E_1 \equiv [A_0, A_{n-1}]$ тангенциально вырожденной поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

Из условий инвариантности гиперплоскости σ^{n-1} и точки M_{n-1} соответственно получаем

$$\nabla_\delta y^{n-1} = y^{n-1}\pi^n_n + \pi^{n-1}_n, \qquad (2.5)$$

$$\nabla_\delta x_{n-1} = -x_{n-1}\pi^0_0 - \pi^0_{n-1}. \qquad (2.6)$$

Наконец рассмотрим точку

$$M_n = A_n - y^p A_p - y^i A_i - y^{n-1} A_{n-1} + x A_0$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 - x_p \tau^p - x_i \tau^i - x_{n-1}\tau^{n-1} + y\tau^n.$$

Точка M_n принадлежит гиперплоскостям σ^p, σ^i, σ^{n-1} и определяет вместе с точками $A_0 \equiv M_0$ и M_{n-1} нормаль первого рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Гиперплоскость σ^0 содержит точки M_p, M_i, M_{n-1} и определяет вместе с гиперплоскостями $\sigma^n \equiv \tau^n$ и σ^{n-1} нормаль второго рода гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Условие инцидентности точки M_n и гиперплоскости имеет вид:

$$(M_n, \sigma^0) = 0,$$

откуда

$$x + y + x_p y^p + x_i y^i + x_{n-1} y^{n-1} = 0. \qquad (2.7)$$

Условия инвариантности точки M_n и гиперплоскости σ^0 приводят к соотношениям

$$\delta x = x(\pi^n_n - \pi^0_0) + y^p\pi^0_p + y^i\pi^0_i + y^{n-1}\pi^0_{n-1} - \pi^0_n, \qquad (2.8)$$

$$\delta y = y(\pi^n_n - \pi^0_0) - x_p\pi^p_n - x_i\pi^i_n - x_{n-1}\pi^{n-1}_n + \pi^0_n. \qquad (2.9)$$

Уравнения (2.1)-(2.6),(2.8),(2.9) показывают,что величины x_p, x^i, x_{n-1}, y^p, y^i, y^{n-1}, $\{x, y^p, y^i, y^{n-1}\}$, $\{y, x_p, x_i, x_{n-1}\}$ образуют геометрические объекты ,которые назовем оснащающими объектами распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

2.Последовательность фундаментальных геометрических объектов дает возможность построить оснащающие объекты распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ,внутренним образом с ней связанные.

Положим

$$\Lambda_i = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_i, \quad (2.10) \qquad \Lambda^i = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^i_{pq}, \quad (2.11)$$

$$\Lambda_{n-1} = \frac{1}{\tau} a_{pq} b^{pq}_{n-1}, \quad (2.12) \qquad \Lambda^{n-1} = \frac{1}{\tau} a^{pq} b^{n-1}_{pq} \quad (2.13)$$

Эти величины удовлетворяют дифференциальным уравнениям :

$$\nabla_\delta \Lambda_i = -\Lambda_i \pi^\circ_\circ + \pi^\circ_i , \quad (2.14)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^i = \Lambda^i \pi^n_n - \pi^i_n , \quad (2.15)$$

$$\nabla_\delta \Lambda^{n-1} = \Lambda^{n-1} \pi^n_n - \pi^{n-1}_n , \quad (2.16)$$

$$\nabla_\delta \Lambda_{n-1} = -\Lambda_{n-1} \pi^\circ_\circ + \pi^\circ_{n-1} , \quad (2.17)$$

которые показывают,что они являются геометрическими объектами,определяемыми в окрестности второго порядка распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} .Сравнивая уравнения (2.14)-(2.17) соответственно с уравнениями (2.3),(2.4),(2.5),(2.6) приходим к следующему результату:

Т е о р е м а I. Инвариантные плоскости $E_{n-\tau-3}=[M_i]=[A_i-\Lambda_i A_\circ]$ и $E_{\tau+2}=[\sigma^i]=[\tau^i-\Lambda^i\tau^n]$, инвариантные точка $M_{n-1}=A_{n-1}-\Lambda_{n-1}A_\circ$ и гиперплоскость $\sigma^{n-1}=\tau^{n-1}-\Lambda^{n-1}\tau^n$ внутренним образом связаны с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2} ,двойственны друг другу и определяются в её окрестности второго порядка.

3.Построим охваты фундаментальным объектом третьего порядка Γ_3 оснащающих объектов x_p и x^p гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Составим величины:

$$d_p = \frac{1}{\tau+2} a_{pqt} a^{qt}, \quad (2.18) \qquad d^p = \frac{1}{\tau+2} a^{pqt} a_{qt} . \quad (2.19)$$

Эти величины позволяют построить относительные тензоры :

$$\ell_{pqt} = a_{pqt} - a_{(pq} d_{t)} , \quad (2.20)$$

$$\ell^{pqt} = a^{pqt} - a^{(pq} d^{t)} , \quad (2.21)$$

связанные равенством

$$\ell^{pqt} = a^{sp} a^{fq} a^{vt} \ell_{sfv} \quad (2.22)$$

и удовлетворяющие условиям аполярности :

$$\ell_{pqt} a^{qt} = 0 , \quad \ell^{pqt} a_{qt} = 0 . \quad (2.23)$$

Тензор ℓ_{pqt} является тензором Дарбу [5] базисной поверхности V^{τ}_{n-2} ,а тензор ℓ^{pqt} –тензором Дарбу гиперповерхности V^{τ}_{n-1},огибающей главные касательные гиперплоскости τ^n гиперполосы CH^{τ}_{n-2} .Тензоры Дарбу ℓ_{pqt} и ℓ^{pqt} удовлетворяют соответственно следующим дифференциальным уравнениям

$$\nabla \ell_{pqt} = -\ell_{pqt} (2\omega^\circ_\circ + \omega^n_n) + \ell_{pqts} \omega^s , \quad (2.24)$$

$$\nabla \ell^{pqt} = \ell^{pqt} (\omega^\circ_\circ + 2\omega^n_n) - \ell^{pqts} \omega^n_s . \quad (2.25)$$

С помощью тензоров Дарбу строим относительный инвариант

$$\ell = \ell_{pqt} \ell^{pqt} . \quad (2.26)$$

Дальнейшее построение проводится в предположении,что $\ell \neq 0$. В общем случае можно считать,что $\ell \neq 0$ при $\ell_{pqt} \neq 0$.

Имеем

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^\circ_\circ + \ell_p \omega^p \quad (2.27)$$

или

$$d \ln \ell = \omega^n_n - \omega^\circ_\circ - \ell^p \omega^n_p , \quad (2.28)$$

где $\ell^p = a^{pq} \ell_q$.

С помощью величин d_p, d^p и ℓ_p, ℓ^p можно построить оснащающие объекты x_p и y^p нужного строения:

$$\Lambda_p = -\frac{1}{2}(d_p + \ell_p), \tag{2.29}$$

$$\Lambda^p = -\frac{1}{2}(d^p + \ell^p), \tag{2.30}$$

где

$$\nabla \Lambda_p = -\Lambda_p \omega_0^0 + \omega_p^0 + \bar{\Lambda}^q_p \omega_q^n, \tag{2.31}$$

$$\nabla \Lambda^p = \Lambda^p \omega_n^n - \omega_n^0 - \tilde{\Lambda}^p_q \omega^q. \tag{2.32}$$

Действительно, уравнения (2.I),(2.3) удовлетворяются соответственно при $x_p = -\Lambda_p$, $y^p = -\Lambda^p$.

Итак, имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2. Инвариантные плоскости

$$E_{\tau-1} = [M_p] = [A_p - \Lambda_p A_0] \text{ и } E_{n-\tau} = [\sigma^p] = [\tau^p - \Lambda^p \tau^n]$$

внутренним образом присоединены к распадающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2}, двойственны друг другу и определяются в её окрестности третьего порядка.

4. Перейдем теперь к построению объектов, определяющих инвариантную точку M_n и гиперплоскость σ^0. Уравнения (2.7)-(2.9), которым удовлетворяют эти объекты, теперь принимают вид:

$$x + y + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \Lambda^i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1} = 0, \tag{2.32}$$

$$\delta x = x(\pi_n^n - \pi_0^0) - \Lambda^p \pi_p^0 - \Lambda^i \pi_i^0 - \Lambda^{n-1} \pi_{n-1}^0 - \pi_n^0, \tag{2.33}$$

$$\delta y = y(\pi_n^n - \pi_0^0) + \Lambda_p \pi_n^p + \Lambda_i \pi_n^i + \Lambda_{n-1} \pi_n^{n-1} + \pi_n^0. \tag{2.34}$$

Вернемся к уравнениям (2.3I),(2.32). Здесь величины $\bar{\Lambda}^q_p$ и $\tilde{\Lambda}^p_q$ определяются в окрестности четвертого порядка распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}. Дальнейшее построение в окрестности четвертого порядка гиперполосы CH^{τ}_{n-2} приводим аналогично работе [3].

Вводим в рассмотрение величины

$$\tilde{x} = \Lambda + \tilde{\Lambda} + \tilde{\tilde{\Lambda}}, \qquad \bar{y} = \Lambda + \bar{\Lambda} + \bar{\bar{\Lambda}}, \tag{2.35}$$

где

$$\Lambda = -\Lambda_i \Lambda^i - \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}, \quad \tilde{\Lambda} = \frac{1}{\tau} \tilde{\Lambda}^p_p, \quad \bar{\Lambda} = \frac{1}{\tau} \bar{\Lambda}^p_p,$$

$$\tilde{\tilde{\Lambda}} = \frac{1}{\tau} a^{pq} \Lambda_p \Lambda_q, \quad \bar{\bar{\Lambda}} = \frac{1}{\tau} a^{pq} \Lambda_p.$$

Тогда легко показать, что инвариантная точка

$$\tilde{M}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \tilde{x} A_0$$

и инвариантная гиперплоскость

$$\bar{\sigma}^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \bar{y} \tau^n,$$

внутренним образом присоединены к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} в её окрестности четвертого порядка. Однако условие инцидентности (2.32) для точки $\tilde{M}_n$ и гиперплоскости $\bar{\sigma}^0$ не выполняется. Поэтому в пучке гиперплоскостей $[\sigma^0, \sigma^n]$ можно выделить инвариантную гиперплоскость

$$\tilde{\sigma}^0 = \tau^0 + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} - (\tilde{x} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda^i \Lambda_i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}) \tau^n$$

инцидентную точке $\tilde{M}_n$, а на прямой $[A_0, \tilde{M}_n]$ - инвариантную точку

$$\overline{M}_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} - (\bar{y} + \Lambda_p \Lambda^p + \Lambda_i \Lambda^i + \Lambda_{n-1} \Lambda^{n-1}) A_0 ,$$

инцидентную гиперплоскости σ^0. Более того, нетрудно показать, что величины

$$\Lambda^0 = \frac{\alpha \tilde{x} + \beta \bar{x}}{\alpha + \beta} , \quad \Lambda_n = \frac{\alpha \tilde{y} + \beta \bar{y}}{\alpha + \beta} , \qquad (2.36)$$

где α и β -произвольные вещественные числа, удовлетворяют уравнениям (2.33),(2.34).

В силу этого, точка

$$M_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^0 A_0 \qquad (2.37)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n \qquad (2.38)$$

инвариантны и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (2.32). Итак, приходим к выводу:

Т е о р е м а 3. Точка M_n и гиперплоскость σ^0 внутренним образом присоединены к касающейся гиперполосе CH^{τ}_{n-2}, двойственны друг другу и определяются в её окрестности четвертого порядка.

Таким образом, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы имеют следующий вид:

$$M_0 = A_0 , \qquad \sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_p \tau^p + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1} \tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n ,$$

$$M_p = A_p - \Lambda_p A_0 , \quad \sigma^p = \tau^p - \Lambda^p \tau^n , \qquad (2.39)$$

$$M_i = A_i - \Lambda_i A_0 , \qquad \sigma^i = \tau^i - \Lambda^i \tau^n ,$$

$$M_{n-1} = A_{n-1} - \Lambda_{n-1} A_0 , \qquad \sigma^{n-1} = \tau^{n-1} - \Lambda^{n-1} \tau^n , \qquad (2.39)$$

$$M_n = A_n + \Lambda^p A_p + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^0 A_0 , \quad \sigma^n = \tau^n .$$

З а м е ч а н и е. Можно показать, что если соприкасающаяся плоскость второго порядка базисной поверхности V^{τ}_{n-2} распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} заполняют все пространство, то объект пятого порядка гиперполосы CH^{τ}_{n-2} является полным.

§3. Фокальные образы, связанные с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2} ранга τ.

Для выяснения геометрического смысла элементов инвариантного оснащения, построенного во втором параграфе, рассмотрим фокальные образы, связанные с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}.

Выясним геометрический смысл инвариантной плоскости $E_{n-\tau-3} = [M_i] \subset E_s$, внутренним образом связанной с гиперполосой CH^{τ}_{n-2}.

Рассмотрим инвариантную точку

$$X = x^i A_i + x^0 A_0 , \qquad (3.1)$$

которая принадлежит образующей $E_s = [A_0, A_i]$ базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

О п р е д е л е н и е I. Точку X назовем фокальной [I], если она принадлежит кроме E_s еще некоторой смежной образующей E'_s. Геометрическое место фокальных точек X

назовем фокальной поверхностью $\mathcal{F}_\tau$ образующей E_s [I].

Из условия фокальности точки X в силу уравнений (I.2),(I.15) вытекает, что фокальная поверхность $\mathcal{F}_\tau$:

$$\det\| x^0\delta^p_q + x^i a^p_{iq} \| = 0, \ (a) \ ; \ x^p = 0, x^{n-1} = 0, x^n = 0, (b) \quad (3.2)$$

представляет собой алгебраическую поверхность порядка τ [I]

Уравнения (3.2a) запишем в виде

$$\sum_{s=0}^{\tau} \mathcal{D}_s (x^0)^{\tau-s} = 0, \qquad (3.3)$$

где $\mathcal{D}_s$ — главные миноры порядка s матрицы определителя $\det\| x^0\delta^p_q + x^i a^p_{iq} \|$, причем

$$\mathcal{D}_0 = 1, \ \mathcal{D}_1 = \tau x^i \Lambda_i, \ \mathcal{D}_\tau = \det\| x^i b^{pt}_i a_{qt} \|.$$

Обозначим корни уравнения (3.3) через $\underset{(p)}{x^0}$ и назовем их характеристическими корнями этого уравнения. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-x^i \Lambda_i = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \underset{(p)}{x^0}. \qquad (3.4)$$

На прямой

$$X = x^0 A_0 + \tilde{x}^i A_i, \qquad (3.5)$$

где $\tilde{x}^i = x^i$ — фиксированные переменные, в общем случае (когда поверхность $\mathcal{F}_\tau$ не вырождается) корни $\underset{(p)}{x^0}$ определяют τ точек

$$\underset{(p)}{X} = \tilde{x}^i A_i + \underset{(p)}{x^0} A_0. \qquad (3.6)$$

Определение 2. Точки $\underset{(p)}{X}$, соответствующие характеристическим корням $\underset{(p)}{x^0}$ уравнения (3.3), назовем характеристическими точками прямой (3.5) относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$ (3.2).

Определение 3. Гармоническим полюсом [8] точки A_0 относительно характеристических точек $\underset{(p)}{X}$ прямой (3.5), принадлежащей образующей E_s базисной поверхности V^τ_{n-2} или (что то же) гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau \in E_s$ назовем точку

$$\tilde{X} = \tilde{x}^i A_i + \tilde{x}^0 A_0, \qquad (3.7)$$

где

$$\tilde{x}^0 = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \underset{(p)}{x^0} \qquad (3.8)$$

В силу (3.4),(3.7),(3.8) находим, что

$$\tilde{X} = \tilde{x}^i M_i,$$

т.е. точка $\tilde{X}$ принадлежит инвариантной плоскости

$E_{n-\tau-3} = [M_i]$.

Если теперь x^i менять произвольным образом, то точка $\tilde{X}$ опишет гармоническую поляру [7] точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_\tau$ (3.2).

Выясним геометрический смысл инвариантной плоскости $E_{\tau+2} = [\sigma^i]$, внутренним образом присоединенной к гиперполосе CH^τ_{n-2} — двойственного образа плоскости $E_{n-\tau-3}$.

Рассмотрим пучок гиперплоскостей:

$$\sigma = y_i \tau^i + y_n \tau^n. \qquad (3.9)$$

осью которого является касательная плоскость $E_{\tau+1}=[\tau^i,\tau^n]$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$.

Определение 4. Гиперплоскость σ называется фокальной [I], если, кроме плоскости $E_{\tau+1}$, она проходит также через некоторую смежную касательную плоскость $E'_{\tau+1}$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$. Геометрическое место фокальных плоскостей σ называется фокальным конусом Φ_τ касательной плоскости $E_{\tau+1}$.

Из условия фокальности гиперплоскости σ в силу уравнений (I.2),(I.17) следует, что фокальный конус Φ_τ представляет собой алгебраическую поверхность класса τ:

$$\det\| y_n\delta^t_p + y_i a^{it}_p \| = 0, \ (a); \ y_p=0,\ y_{n-1}=0,\ y_n=0. (b) \quad (3.10)$$

Уравнения (3.10a) запишем в виде:

$$\sum_{s=0}^{\tau} \mathcal{D}_s (y_n)^{\tau-s} = 0, \quad (3.11)$$

где $\mathcal{D}_s$ -главные миноры порядка s матрицы определителя $\det\| y_n\delta^t_p + y_i a^{it}_p \|$, причем

$$\mathcal{D}_0 = 1,\ \ \mathcal{D}_1 = \tau y_i \Lambda^i,\ \ \mathcal{D}_\tau = \det\| y_i a^{it}_p \|.$$

Обозначим корни уравнения (3.11) через $\overset{(p)}{y}_n$ и назовем их характеристическими корнями этого уравнения. По обобщенной теореме Виетта имеем

$$-y_i\Lambda^i = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \overset{(p)}{y}_n. \quad (3.12)$$

Определение 5. Гиперплоскости $\overset{(p)}{\sigma}$, соответствующие характеристическим корням $\overset{(p)}{y}_n$ уравнения (3.11), т.е.

гиперплоскости вида

$$\overset{(p)}{\sigma} = \tilde{y}_i \tau^i + \overset{(p)}{y}_n \tau^n \quad (3.13)$$

будем называть характеристическими гиперплоскостями пучка

$$\sigma = \tilde{y}_i \tau^i + y_n \tau^n,$$

где y_n -переменная величина, $\tilde{y}_i$ -фиксированные величины.

Определение 6. Гармонической полярой [8] гиперплоскости τ^n относительно характеристических гиперплоскостей $\overset{(p)}{\sigma}$ пучка (3.13), осью которого является $(\tau+1)$-мерная плоскость $E_{\tau+1}$ или (что то же) гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ назовем гиперплоскость

$$\tilde{\sigma} = \tilde{y}_i \tau^i + \tilde{y}_n \alpha^n, \quad (3.14)$$

где

$$\tilde{y}_n = \frac{1}{\tau}\sum_{p=1}^{\tau} \overset{(p)}{y}_n. \quad (3.15)$$

В силу (3.12),(3.14) имеем:

$$\tilde{\sigma} = \tilde{y}_i \sigma^i, \quad (3.16)$$

т.е. гиперплоскость $\tilde{\sigma}$ проходит через инвариантную плоскость $E_{\tau+2}=[\sigma^i]$.

При переменных y_i гиперплоскость $\tilde{\sigma}$ описывает пучок, осью которого является $(\tau+2)$-мерная плоскость $E_{\tau+2}$ - гармоническая поляра гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_τ.

Таким образом, приходим к следующей теореме :

Т е о р е м а 4. Инвариантная плоскость $E_{n-\tau-3}$, определяемая точками M_i и принадлежащая плоской образующей E_s базисной поверхности V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$, принадлежащей образующей E_s.

Инвариантная плоскость $E_{\tau+2}=[\sigma^i]$, внутренним образом связанная с распадающейся гиперполосой CH^{τ}_{n-2} и проходящая через касательную плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}, является гармонической полярой главной касательной гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса Φ_{τ}, вершиной которого является плоскость $E_{\tau+1}$.

Совершенно аналогично доказываются теоремы:

Т е о р е м а 5. Инвариантная точка M_{n-1}, внутренним образом связанная с гиперполосой, принадлежащая образующей $E_1=[A_0, M_{n-1}]$ поверхности $V^{\tau}_{\tau+1}$, является гармоническим полюсом точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathcal{F}_{\tau}$:

$$\det\| x^0\delta^p_q + b^{pt}_{n-1} a_{qt} \| = 0, \quad x^p = 0, \quad x^i = 0, \quad x^n = 0. \quad (3.17)$$

Инвариантная гиперплоскость σ^{n-1}, внутренним образом присоединенная к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} и не совпадающая с главной касательной гиперплоскостью τ^n, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| y_n\delta^q_p + a^{n-1,q}_p \| = 0, \quad y_p = 0, \quad y_i = 0, y_0 = 0, \quad (3.18)$$

вершиной которого является плоскость $E_{n-2}=[\sigma^{n-1}, \sigma^n]$.

Т е о р е м а 6. Инвариантная плоскость $\Pi_{n-\tau-2}=[M_i, M_{n-1}]$, внутренним образом присоединенная к гиперполосе и принадлежащая характеристической плоскости $E_{n-\tau-1}$ гиперполосы CH^{τ}_{n-2}, является гармонической полярой точки A_0 относительно фокальной поверхности $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| x^0\delta^q_p + x^i a^q_{ip} + x^{n-1} a^p_{n-1,q} \| = 0, \quad x^p = 0, \quad x^n = 0, \quad (3.19)$$

которая принадлежит образующей $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V^{τ}_{n-1} (характеристике гиперполосы).

Инвариантная плоскость $E_{\tau+1}=[\sigma^i, \sigma^{n-1}]$, внутренним образом присоединенная к гиперполосе CH^{τ}_{n-2} и проходящая через касательную плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}, является гармонической полярой гиперплоскости τ^n относительно фокального конуса $\mathfrak{F}_{\tau}$:

$$\det\| y_n\delta^p_q + y_{n-1} a^{n-1,p}_q + y_i a^{ip}_q \| = 0, \quad y_0 = 0, \quad y_p = 0, \quad (3.20)$$

вершиной которого является касательная плоскость T_{τ} поверхности V_{τ}.

§4. Некоторые классы распадающихся гиперполос CH^{τ}_{n-2} ранга τ.

Рассмотрим специальные классы гиперполос CH^{τ}_{n-2}, которые связаны с обращением в нуль относительных тензоров

$$c^i_{pq} = b^i_{pq} - \Lambda^i a_{pq}, \ (4.1); \quad c^{n-1}_{pq} = b^{n-1}_{pq} - \Lambda^{n-1} a_{pq}, \ (4.2)$$

$$c_i^{pq} = b_i^{pq} - \Lambda_i a^{pq}, \quad (4.3); \quad c_{n-1}^{pq} = b_{n-1}^{pq} - \Lambda_{n-1} a^{pq}, \quad (4.4)$$

определенных в окрестности второго порядка гиперполосы CH_{n-2}^{r}.

I. Конические распадающиеся гиперполосы CH_{n-2}^{r}.

О п р е д е л е н и е 7. Распадающуюся гиперполосу назовем конической [4], если гиперповерхность V_{n-1}^{r}, огибающая главные касательные гиперплоскости гиперполосы, является гиперконусом с вершиной в неподвижной плоскости

$$\Pi_{n-r-2} = [M_i, M_{n-1}].$$

Т е о р е м а 7. Для того, чтобы базисная поверхность V_{n-2}^{r} гиперполосы CH_{n-2}^{r} была конической [7], необходимо и достаточно, чтобы

$$c_i^{pq} \equiv 0. \quad (4.5)$$

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть базисная поверхность V_{n-2}^{r} гиперполосы CH_{n-2}^{r} является конической, а плоскость $E_{n-r-3} \equiv [r^0, r^p, r^{n-1}, r^n]$ —вершина этого конуса. Из условия неподвижности плоскости E_{n-r-3} следует, что

$$\omega_i^p \equiv 0. \quad (4.6)$$

Отсюда в силу (I.I5) получаем

$$b_i^{pq} \equiv 0. \quad (4.7)$$

Теперь из (2.I0) и (4.7) находим $\Lambda_i = 0$ и, следовательно,

$$c_i^{pq} \equiv 0.$$

Д о с т а т о ч н о с т ь. В силу (4.5) выполняется соотношение (4.3) принимает вид:

$$b_i^{pq} = \Lambda_i a^{pq}. \quad (4.8)$$

и, следовательно,

$$\omega_i^p = \Lambda_i \omega^p. \quad (4.9)$$

Продолжая (4.9), находим

$$\nabla \Lambda_i = -\Lambda_i \omega_0^0 + \omega_i^0. \quad (4.10)$$

Имеем

$$dM_i = (\nabla\Lambda_i - \Lambda_i \omega_0^0 + \omega_i^0) A_0 + (\omega_i^p - \Lambda_i \omega^p) A_p + \omega_i^j M_j. \quad (4.11)$$

В силу (4.9), (4.I0) коэффициенты при A_0 и A_p выражения (4.II) тождественно равны нулю, поэтому

$$dM_i = \omega_i^j M_j$$

т.е. плоскость $E_{n-r-3} = [M_i]$ неподвижна. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Уравнения фокальной поверхности $\mathcal{F}_r$ (3.2) при условии (4.5) принимают вид:

$$\det \| (x^0 + x^i \Lambda_i) \delta_q^p \| = 0, \quad x^p = 0, \ x^{n-1} = 0, \ x^n = 0 \quad (4.12)$$

Соотношения (4.I2) показывают, что фокальная поверхность вырождается и совпадает с плоскостью $E_{n-r-3} \subset E_s$.

Также легко устанавливаются следующие результаты:

Т е о р е м а 8. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность V_{r+1}^{r} была конической, необходимо и достаточно, чтобы

$$c^{pq}_{n-1} = 0 \tag{4.13}$$

Т е о р е м а 9. Распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} является конической тогда и только тогда, когда выполняются и условия (4.5) и (4.13).

Т е о р е м а 10. Для того, чтобы базисная поверхность V^{τ}_{n-2} распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{n-2} была конической, необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{p}_{iq} = a_i \delta^{p}_{q}, \tag{4.14}$$

где a_i квазитензор:

$$\nabla_\delta a_i = -a_i \pi^{0}_{0} + \pi^{0}_{i}. \tag{4.15}$$

Т е о р е м а 11. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность $V^{\tau}_{\tau+1}$ была конической необходимо и достаточно, чтобы

$$a^{p}_{n-1,q} = a_{n-1} \delta^{p}_{q}, \quad \text{где} \quad \nabla_\delta a_{n-1} = -a_{n-1}\pi^{0}_{0} + \pi^{0}_{n-1}. \tag{4.16}$$

Следовательно, можно сформулировать еще один признак конических гиперполос CH^{τ}_{n-2} эквивалентный предыдущему.

Т е о р е м а 12. Для того, чтобы распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} была конической, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$a^{p}_{iq} = a_i \delta^{p}_{q}; \quad a^{p}_{n-1,q} = a_{n-1} \delta^{p}_{q}, \tag{4.17}$$

где квазитензоры a_i и a_{n-1} удовлетворяют соответственно условиям (4.15) и (4.16).

2. Плоские распадающиеся гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Обращение в нуль тензоров C^{i}_{pq} и C^{n-1}_{pq} выделяет еще один класс распадающихся гиперполос CH^{τ}_{n-2}. Геометрические образы, связанные с этим классом гиперполос CH^{τ}_{n-2}, двойственны соответствующим образам конических гиперполос CH^{τ}_{n-2}. Так как аналитические выкладки по существу ничем не отличаются от выкладок пункта, то нетрудно убедиться в следующих результатах:

О п р е д е л е н и е 8. Распадающуюся гиперполосу CH^{τ}_{n-2} назовем плоской [4], если направляющая поверхность V_τ (поверхность центров плоских образующих E_s) базисной поверхности V^{τ}_{n-2} этой гиперполосы лежит в неподвижной плоскости $E_{\tau+1} \supset T_\tau$.

Т е о р е м а 13. Для того, чтобы базисная поверхность V^{τ}_{n-2} гиперполосы CH^{τ}_{n-2} была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$C^{n-1}_{pq} \equiv 0. \tag{4.18}$$

Т е о р е м а 14. Для того, чтобы тангенциально вырожденная поверхность $V^{\tau}_{\tau+1}$ была плоской, необходимо и достаточно, чтобы

$$C^{i}_{pq} \equiv 0. \tag{4.19}$$

Наконец, сформулируем характеристический признак плоской гиперполосы CH^{τ}_{n-2}.

Т е о р е м а 15. Распадающаяся гиперполоса CH^{τ}_{n-2} является плоской тогда и только тогда, когда выполняются

Зак. 10314.

условия

$$c^{i}_{pq} = 0, \quad c^{n-1}_{pq} = 0. \qquad (4.20)$$

Литература

I.Акивис М.А.,Фокальные образы поверхности ранга r. Известия высших учебных заведений,1957,I,9-I9.

2.Вагнер В.В.,Теория поля локальных гиперполос.Труды семинара по векторной и тенз.анализу,М.-Л,1952,т.8,III-272.

3.Василаян М.А.,Об инвариантном оснащении гиперполосы. ДАН Арм.ССР,т.50,№2,1970,65-69.

4.Васильян М.А.,Проективная теория многомерных гиперполос.Известия АН Арм.ССР,Математика,т.6,I97I,477-48I.

5.Лаптев Г.Ф.,Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.Труды Моск.матем.общества,1953,т.2,275-382.

6.Норден А.П.,Пространство аффинной связности,ГИТТЛ, М.-Л.,1950.

7.Попов Ю.И.,Введение инвариантного оснащения на вырожденной гиперполосе Γ_m многомерного проективного пространства P_n .Труды Калининградского ун-та."Дифференциальная геометрия многообразий фигур",вып.I,1970,27-46.

8. Casanova G. „La nation de pôle harmonique", Rev. math. spéc, t 65, № 6, 1955, 437-440.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Свешникова Г.Л.

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ [2,0].

В трехмерном проективном пространстве P_3 исследуются конгруэнции кривых второго порядка (коник) с кратными вырождающимися фокальными поверхностями.Конгруэнцией (k,κ) (соответственно $[k,\kappa]$ или $\{k,k\}$) называется конгруэнция коник в P_3 ,у которой k фокальных поверхностей (соответственно $2k$ или $3k$) вырождаются в k различных линий, 2κ фокальных поверхностей вырождаются в κ различных точек.

В данной работе рассматриваются конгруэнции коник с двумя двукратными фокальными поверхностями,вырождающимися в линии,то есть конгруэнции $[2,0]$.

§I.Построение репера.Теорема существования.

Определение I.Конгруэнцией $\mathcal{L}$ называется конгруэнция кривых второго порядка,обладающая следующими свойствами: I/существуют две фокальные поверхности (S_i) (i,j,κ =I,2), вырождающиеся в линии,причем они являются сдвоенными,2/касательные ℓ_i к линиям (S_i) не инцидентны плоскости коники.