3. *Картан Э.* Пространства аффинной, проективной и конформной связности. Казань, 1962.

4. *Лаптев Г.Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Труды Моск. матем. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.

5. *Остиану Н.М.* О канонизации подвижного репера погруженного многообразия // Rev. math. pures et appl. (RPR). 1962. Т. 7. №2. С. 231—240.

6. *Akivis M.A., Goldberg V.V.* Conformal differential geometry and its generalizations. USA, 1996.

A. Stolyarov

THE PROJCTIVELY CONNECTED SPACE $P_{n,n+1}$
WITH THE INVARIANT FIELD
OF DARBOUX'S LOCAL HYPERQUADRICS

The invariant condition under which the projectively connected space $P_{n,n+1}$ with the invariant field of Darboux's local hyperquadrics is isomorphic to the conformly connected space $C_{n,n}$, is found.

УДК 514.76

А.Я. Султанов

(Пензенский государственный педагогический университет)

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЕ ЛИФТЫ ЛИНЕЙНЫХ СВЯЗНОСТЕЙ НА РАССЛОЕНИЯХ ВЕЙЛЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

На расслоении Вейля, порядок которого равен двум, построены горизонтальные лифты тензорных полей и линейных связностей.

§ 1. Алгебры Вейля и расслоения Вейля

Расслоения Вейля порождаются гладкими многообразиями и алгебрами Вейля [1]. Введению этих понятий посвящен настоящий параграф.

Определение 1. Линейная алгебра **A** конечного ранга над полем действительных чисел **R** называется алгеброй Вейля высоты **p**, если выполнены следующие условия:

1) **A** — коммутативна, ассоциативна, обладает единицей;

2) существует идеал $\mathbf{I} \subset \mathbf{A}$ такой, что $\mathbf{I}^p \neq \{0\}$, а $\mathbf{I}^{p+1} = \{0\}$ для некоторого натурального числа **p**;

3) фактор-алгебра $\mathbf{A}/\mathbf{I}$ изоморфна алгебре **R**.

Из условия 3 следует, что каждый элемент $a \in \mathbf{A}$ единственным образом можно представить в виде суммы $a = a_0\delta + b$, где $a_0 \in \mathbf{R}$; δ — единица алгебры **A**; $b \in \mathbf{I}$. Поскольку множество элементов вида $a_0\delta$ образует подалгебру, изоморфную алгебре действительных чисел, то алгебра **A** изоморфна полупрямой сумме **R** + **I**. В силу этого изоморфизма единицу δ алгебры **A** можно отождествлять с единицей алгебры **R**.

Выберем в **A** базис так, чтобы $\varepsilon^0 = 1$, $\varepsilon^\alpha \in I$ ($\alpha = 1, 2, \dots, m$). Пусть $\varepsilon^0 \varepsilon^\alpha = \gamma_0^{0\alpha} \varepsilon^0 + \gamma_\beta^{0\alpha} \varepsilon^\beta$, $\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta = \gamma_0^{\alpha\beta} \varepsilon^0 + \gamma_\sigma^{\alpha\beta} \varepsilon^\sigma$. Тогда $\gamma_0^{0\alpha} = 0$, $\gamma_0^{\alpha\beta} = 0$, $\gamma_\beta^{0\alpha} = \delta_\beta^\alpha$. В силу условия (2) существует хотя бы одно произведение вида $\varepsilon^{\alpha_1} \varepsilon^{\alpha_2} \dots \varepsilon^{\alpha_p}$, отличное от нуля, а произведение любых **p** + 1 элементов равно нулю. Последнее условие равносильно следующему условию для структурных постоянных алгебры **A**: $\gamma_{\sigma_1}^{\alpha_1\alpha_2} \gamma_{\sigma_2}^{\sigma_1\alpha_3} \dots \gamma_{\sigma_p}^{\sigma_{p-1}\alpha_{p+1}} = 0$, где по индексам $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{p-1}$ ведется суммирование от 1 до m.

Перейдем к описанию расслоений Вейля. Предположим, что M_n — гладкое многообразие размерности n класса C^∞, а $C^\infty(M_n)$ — алгебра гладких вещественнозначных функций класса C^∞, заданных на M_n. Следуя А. Вейлю, говорят, что гомоморфизм j_p: $C^\infty(M_n) \to \mathbf{A}$ является **A**-близкой точкой к точке $p \in M_n$, если имеет место сравнение $j_p(f) \equiv f(p)$ (mod **I**).

Обозначим через $(M_n)^{\mathbf{A}}{}_p$ — множество всевозможных точек, **A**-близких к точке $p \in M_n$ и составим объединение $\bigcup_{p \in M_n} (M_n)_p^A = M_n^A$. Определим каноническую проекцию

$\pi : M_n^A \to M_n$ условием $\pi(j_p) = p$. На множестве M_n^A возникает гладкая структура, порожденная гладкой структурой многообразия M_n.

Определение 2. Тройка (M_n^A, π, M_n) называется расслоением Вейля порядка **p**.

Естественным образом определяются **A**-продолжения функций из $C^\infty(M_n)$ в $C^\infty(M_n^A)$. Здесь $C^\infty(M_n^A)$ представляет собой алгебру голоморфных класса C^∞ функций над алгеброй Вейля **A**.

Определение 3. Для каждой функции $f \in C^\infty(M_n)$ функция $f^{\mathbf{A}}$, удовлетворяющая условию $f^{\mathbf{A}}(j_p) = j_p(f)$, называется **A**-продолжением (иначе — естественным продолжением) функции f.

В данной работе в дальнейшем будем рассматривать лишь расслоения Вейля второго порядка.

§ 2. Продолжения тензорных полей с M_n в M_n^A

1. Лифты функций. Пусть a^* — линейная форма, заданная на **A** и принимающая значения в **R**. Тогда композиция $a^* \circ f^{\mathbf{A}}$ — вещественнозначная функция на M_n^A. Эту функцию обозначим через $f_{(a^*)}$. Для линейных форм ε_0, ε_α дуального базиса к базису ε^0, ε^α будем использовать следующие обозначения $f_{(\varepsilon_0)} = f_{(0)}, f_{(\varepsilon_\alpha)} = f_{(\alpha)}$, причем $f_{(0)} = f \circ \pi$.

Пусть (U, x^i) — координатная окрестность на $\boldsymbol{M_n}$. На множестве $\pi^{-1}(U) \subset M_n^A$ рассмотрим естественные продолжения $(x^i)^{\mathbf{A}}$ координатных функций. Так как $(x^i)^{\mathbf{A}} = x_0^i + x_\alpha^i \varepsilon^\alpha$, то $(x^i)_{(0)} = x^i_0$, $(x^i)_{(\alpha)} = x^i_\alpha$. Функции x^i_0, x^i_α являются координатными функциями на $\pi^{-1}(U)$.

Для каждой функции $f \in C^\infty(\boldsymbol{M_n})$ имеет место разложение Тейлора в некоторой окрестности точки p

$$f = f(p) + \partial_j f(p)(x^j - p^j) + \frac{1}{2!}\partial_{jk} f(p)(x^j - p^j)(x^k - p^k) + \\ + \frac{1}{3!}\partial_{jkl} f \circ \xi (x^j - p^j)(x^k - p^k)(x^l - p^l), \qquad (2.1)$$

где $p^i = x^i(p)$; ξ — отображение, определенное условием $x^i(\xi(q)) = p^i + \theta(q)(q^i - p^i)$, при $0 < \theta(q) < 1$ для каждой точки q из рассматриваемой окрестности точки p.

Для каждого гомоморфизма j_p имеем

$$j_p(x^i) = (x^i)^A(j_p) = x_0^i(j_p) + x_\alpha^i(j_p)\varepsilon^\alpha .$$

Так как $j_p(x^i) \equiv x^i(p)\ (mod\ \mathbf{I})$, то $x^i{}_0(j_p) = x^i(p) = p^i$. Поэтому $j_p(x^i - p^i) = x_\alpha^i(j_p)\varepsilon^\alpha$. Учитывая это, из разложения (2.1) следует, что

$$f^A(j_p) = j_p(f) = f \circ \pi(j_p) + (\partial_j f \circ \pi)(j_p) x_\alpha^j(j_p)\varepsilon^\alpha + $$
$$+ \frac{1}{2}(\partial_{jk} f \circ \pi)(j_p) x_\alpha^j(j_p) x_\beta^k(j_p)\varepsilon^\alpha \varepsilon^\beta .$$

Отсюда получим

$$f^A = f_{(0)} + (\partial_j f)_{(0)} x_\alpha^j \varepsilon^\alpha + \frac{1}{2}(\partial_{jk} f)_{(0)} x_\alpha^j x_\beta^k \gamma_\sigma^{\alpha\beta} \varepsilon^\sigma .$$

Используя определение функций $f_{(\alpha)}$, имеем

$$f_{(\alpha)} = (\partial_j f)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2}(\partial_{jk} f)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau} . \qquad (2.2)$$

В формулах (2.2) по σ и τ ведется суммирование от 1 до m.

Пусть $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V) \neq \varnothing$ и координатные функции x^i, $\bar{x}^i$ на пересечении $U \cap V$ связаны соотношениями $\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^1, x^2, ..., x^n)$. Тогда на $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(V)$ координатные функции $x^i{}_0$, $x^i{}_\alpha$, и $\bar{x}_0^i$, $\bar{x}_\alpha^i$ будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} &\bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, ..., x_0^n), \\ &\bar{x}_\alpha^i = (\partial_j \bar{x}^i)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2}(\partial_{jk} \bar{x}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau} . \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Отметим тождество, которое можно использовать при вычислениях:

$$f_{(\alpha)} \gamma_\sigma^{\alpha\beta} = (\partial_j f)_{(0)} x_\alpha^j \gamma_\sigma^{\alpha\beta} .$$

2. Лифты векторных полей. Пусть X — векторное поле на M_n и $a \in \mathbf{A}$. На M_n^A существует единственное векторное поле $X^{(a)}$, удовлетворяющее условию $X^{(a)}f_{(b^*)} = (Xf)_{(b^* \cdot a)}$, где f — произвольная функция из $C^\infty(M_n)$; $b^* \cdot a$ — линейная форма, определенная условием $b^* \cdot a(c) = b^*(ac)$ при $c \in \mathbf{A}$. При $a = \varepsilon^0$ векторное поле $X^{(\varepsilon^0)} = X^{(0)}$ называется полным лифтом векторного поля X. Векторные поля $X^{(a)}$ при $a \in \mathbf{I}$ называются вертикальными. Они удовлетворяют тождеству $X^{(a)}f_{(0)} = 0$. Действительно, $X^{(a)}f_{(0)} = (Xf)_{(\varepsilon_0 \cdot a)}$. Но

$$\varepsilon_0 \cdot a = a_\alpha(\varepsilon_0 \varepsilon^\alpha) = a_\alpha(\gamma_0^{\alpha 0}\varepsilon_0 + \gamma_0^{\alpha\beta}\varepsilon_\beta) = 0 .$$

Поэтому $(Xf)_{(\varepsilon_0 \cdot a)} = \varepsilon_0 \cdot a((Xf)^A) = 0$. Векторные поля $\widetilde{X}$, удовлетворяющие условию $\widetilde{X}f_{(0)} = 0$, также называются вертикальными.

3. Векторные поля, порожденные тензорными полями типа (1,1). Рассмотрим произвольное тензорное поле T типа (1,1) на M_n. На M_n^A T порождает векторное поле γT, которое в локальных координатах задается следующим образом:

$$\gamma T = ((T_j^i)_{(0)} x_\alpha^j + \frac{1}{2}(\partial_k T_j^i - \Gamma_{lj}^i T_k^l)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau})\partial_i^\alpha ,$$

где $\partial_i^\alpha = (\partial_i)^{(\varepsilon^\alpha)} = \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha^i}$. Векторное поле γT является вертикальным.

4. Лифты, сохраняющие тип тензорного поля. Пусть T — тензорное поле типа (1, r). На M_n^A существует единственное тензорное поле $T^{(a)}$ типа (1, r) для каждого элемента $a \in \mathbf{A}$, удовлетворяющее условию

$$T^{(a)}(X_1^{(b_1)},\ldots, X_1^{(b_r)}) = (T(X_1,\ldots, X_r))^{(ab_1 \ldots b_r)}$$

для любых $X_1, \ldots, X_r \in \Im_0^1(M_n)$, $b_1, \ldots, b_r \in \mathbf{A}$.

Если $r = 1$ и $T = J$ — единичный аффинор, то $J^{(a)}$ называются структурными аффинорами. Из определения следует, что $J^{(a)}(X^{(b)}) = X^{(ab)}$ для любых $a, b \in \mathbf{A}$.

5. Лифты *r*-форм. Пусть ω — r-форма на M_n, a^* — линейная форма на **A**. Тогда на M_n^A существует единственная линейная форма $\omega_{(a^*)}$, удовлетворяющая условию $\omega_{(a^*)}(X_1^{(b_1)},..., X_1^{(b_r)}) = (\omega(X_1,...,X_r))_{(a^*)}$.

6. Функции, порожденные формами. Пусть ω — 1-форма, θ – 2-форма на M_n. На M_n^A они порождают функции $\gamma_{1\alpha}$, $\gamma_{2\alpha}$ ($\alpha = 1, \ldots, m$), определенные в локальных координатах условиями

$$\gamma_{1\alpha}\omega = (\omega_i)_{(0)} x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\partial_j \omega_i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^i \gamma_\alpha^{\sigma\tau}, \quad \gamma_{2\alpha}\theta = \frac{1}{2}\theta_{ij} x_\sigma^i x_\tau^j \gamma_\alpha^{\sigma\tau}.$$

§ 3. Горизонтальные лифты линейных форм и векторных полей

Предположим, что на многообразии M_n задана линейная связность ∇. Тогда на многообразии M_n^A можно построить горизонтальные продолжения тензорных полей и линейных связностей.

1. Горизонтальные функции, порожденные 1-формами. Пусть ω — 1-форма на M_n, соответствие $j_p \to \omega_{[\alpha]}(j_p)$, где $\omega_{[\alpha]}$, $\alpha \in \{1, \ldots, m\}$, определенное в локальных координатах равенством $\omega_{[\alpha]} = (\omega_i)_{(0)}(x_\alpha^i + \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i)_{(0)} x_\sigma^j x_\tau^k \gamma_\alpha^{\sigma\tau})$, является функцией. Здесь Γ^i_{jk} — коэффициенты связности ∇ относительно натурального репера ∂_i на U.

Заметим, что $\gamma_{1\alpha}\omega = \omega_{[\alpha]} + \gamma_{2\alpha}(\nabla\omega)$, где $\nabla\omega$ — ковариантный дифференциал формы ω.

2. Горизонтальные лифты векторных полей. Для каждого векторного поля X определим сначала полный горизонтальный лифт X^{H_0} следующим образом: X^{H_0} = $X^{(0)}$–$\gamma(\hat{\nabla}X)$, где $\hat{\nabla}X$ — дифференциал векторного поля X относительно линейной связности $\hat{\nabla}$, которая определяется условием $\hat{\nabla}_X Y =$ $= \nabla_Y X + [X,Y]$. Действуя на векторное поле X^{H_0} структурным аффинором $J^{(a)}$, получим (a) — горизонтальные лифты векторного поля X:

$$X^{Ha} = J^{(a)}(X^{H_0}).$$

Полный горизонтальный лифт соответствует единице ε^0 алгебры **A.** В дальнейшем будем вместо X^{H_0} писать X^H. В локальных координатах X^H задается следующим образом:

$$X^H = (X^i)_{(0)}(\partial_i^0 - (\Gamma_{ij}^k x_\alpha^j + \frac{1}{2}(\partial_j \Gamma_{is}^k - \Gamma_{ij}^t \Gamma_{ts}^k) x_\sigma^j x_\tau^s \gamma_\alpha^{\sigma\tau})\partial_k^\alpha).$$

Отсюда следует, что $(X+Y)^H = X^H + Y^H$, $(fX)^H = f_{(0)} X^H$. Векторные поля X^{Ha} для $a \in \mathbf{I}$ являются вертикальными и имеют следующие локальные представления:

$$X^{Ha} = a_\alpha (X^i)_{(0)}(\partial_i^\alpha - \Gamma_{ij}^k x_\sigma^j \gamma_\tau^{\sigma\alpha} \partial_k^\tau).$$

Векторные поля $D_i = (\partial_i)^H$, $D_i^\alpha = (\partial_i)^{H\varepsilon^\alpha}$ образуют подвижной репер на $\pi^{-1}(U)$, называемый адаптированным репером к связности ∇.

§ 4. Горизонтальные лифты линейных связностей

Пусть $\overset{\circ}{\nabla}$ — произвольная линейная связность на M_n. При помощи связности $\overset{\circ}{\nabla}$ построим горизонтальные лифты векторных полей с базы M_n в расслоение M_n^A.

Имеет место следующая

Теорема. *Для каждой связности ∇, заданной на M_n, существует, и притом единственная, линейная связность ∇^H на M_n^A, удовлетворяющая условиям*

$$\nabla^H_{X^H} Y^{Ha} = (\nabla_X Y)^{Ha}, \quad \nabla^H_{X^{Hb}} Y^{Ha} = 0 \tag{4.1}$$

для всех X, Y $\in \Im^1_0(M_n)$ *, a, b* $\in$ ***A****, b* $\neq$ *0.*

Доказательство. В каждой карте (U, x^i) атласа гладкой структуры многообразия найдем компоненты связности ∇: $\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k_{ij}\partial_k$. В области $\pi^{-1}(U)$ карты $(\pi^{-1}(U), x^i{}_0, x^i{}_\alpha)$ определим линейную связность $\tilde{\nabla}$ следующим образом:

$$\tilde{\nabla}_{D_i} D_j = (\Gamma^k_{ij})_{(0)} D_k, \ \tilde{\nabla}_{D_i} D^\alpha_j = (\Gamma^k_{ij})_{(0)} D^\alpha_k, \ \tilde{\nabla}_{D^\alpha_i} D_j = 0, \ \tilde{\nabla}_{D^\alpha_i} D^\beta_j = 0,$$

где $D_i=(\partial_i)^H$, $D^\alpha_i = (\partial_i)^{H\varepsilon^\alpha}$ — горизонтальные лифты векторных полей ∂_i относительно линейной связности $\overset{\circ}{\nabla}$. Непосредственные вычисления показывают, что $\tilde{\nabla}$ — связность, заданная на M^A_n. Эта связность удовлетворяет условиям (4.1). Единственность $\tilde{\nabla}$ следует из того, что D_i, D_i^α образуют подвижной репер.

Список литературы

1. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. Казань, 1985.

2. *Султанов А.Я*. Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Сер. Математика. 1999. № 9. С. 81—90.

A. Sultanov

HORIZONTAL LIFTS OF LINEAR CONNECTIONS ON WEIL BUNDLES THE ORDER TWO

On Weil bundle, the order of which is two, horizontal lifts of tensor fields and linear connections are built.