

3. Шевченко Ю.И. Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. Шевченко Ю.И. Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

5. Полякова К.В. О голономности поверхности проективного пространства // XXX науч. конф. проф.-преп. состава, науч. сотр., асп. и студ: Тезисы докладов. Калининград, 1999. Ч. 6. С. 7—8.

A. Kuleshov

#### STRUCTURE FORMS OF HIGHER ORDERS OF SUBMANIFOLDS

Smooth manifold and submanifold in it are considered. On the base of analytic apparatus for the manifold the apparatus for the submanifold is constructed, and relationship between them is found. It is shown that general formula for this forms in the case of surface of the projective space gives the formula coinciding with K. Polyakova's one.

УДК 514.75

*Т. Ю. Максакова*

*(Российский государственный университет им. И. Канта)*

#### ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ Λ-ПОДРАССЛОЕНИЯ $\omega\mathcal{H}$ -РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются вырожденные трехсоставные распределения проективного пространства, которые называются кратко  $\omega\mathcal{H}$ -распределениями [3]. Введены двойственные нормальные связности в расслоениях нормалей 1-го и 2-го рода  $\Lambda$ -подрасслоения данного  $\omega\mathcal{H}$ -распределения.

В работе используется следующая схема индексов:

$$\begin{aligned} J, K, L, P, Q = \overline{1, n}; \quad \bar{J}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{0, n}; \quad p, q, s = \overline{1, r}; \\ u, v, w, x = \overline{r+1, n-1}; \quad \hat{\alpha}, \hat{\beta} = \overline{m+1, n}; \quad \alpha, \beta = \overline{m+1, n-1}; \\ i, j, k, l = \overline{r+1, m}; \quad \hat{u}, \hat{v}, \hat{w} = \overline{r+1, n}; \quad \hat{A}, \hat{B} = (\overline{1, r}; \overline{m+1, n}). \end{aligned}$$

1. Пусть  $n$ -мерное проективное пространство  $P_n$  отнесено к подвижному реперу  $R = \{A_{\bar{J}}\}$ . Деривационные формулы репера  $R$  имеют вид:

$$dA_{\bar{J}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} A_{\bar{K}}, \quad (1)$$

где формы Пфаффа  $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$  подчинены уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} = \omega_{\bar{J}}^{\bar{L}} \Lambda_{\bar{L}}^{\bar{K}} \omega_{\bar{L}}^{\bar{K}}, \quad \sum_{\bar{J}=0}^n \omega_{\bar{J}}^{\bar{J}} = 0. \quad (2)$$

2. Известно [3], что  $\omega$ H-распределение в репере 1-го порядка  $R = \{A_{\bar{J}}\}$  задается уравнениями:

$$\begin{aligned} \omega_i^n &= \Lambda_{i\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \quad \omega_\alpha^n = \Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n \omega_0^{\hat{\beta}}, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{i\hat{\beta}}^\alpha \omega_0^{\hat{\beta}}, \\ \omega_p^n &= \Lambda_{p\hat{A}}^n \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_p^i = \Lambda_{p\hat{A}}^i \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_p^\alpha = \Lambda_{p\hat{A}}^\alpha \omega_0^{\hat{A}}, \\ \omega_\alpha^p &= \Lambda_{\alpha\hat{A}}^p \omega_0^{\hat{A}}, \quad \omega_p^i = \Lambda_{pK}^i \omega_0^K, \quad \omega_\alpha^i = \Lambda_{\alpha K}^i \omega_0^K. \end{aligned} \quad (3)$$

Пусть  $\omega$ H-распределение оснащено в смысле Нордена — Картана [1]. Возьмем другой точечный проективный репер  $\{B_{\bar{J}}\}$ , адаптированной нормализации  $\{\nu_n^p, \nu_p^0\}$   $\Lambda$ -подрасслоения:

$$B_0 = A_0, \quad B_p = A_p + \nu_p^0 A_0, \quad B_v = A_v, \quad B_n = A_n + \nu_n^p A_p + \Lambda_n^v A_v, \quad (4)$$

где  $\nabla \nu_n^p + \omega_n^p = \nu_{nK}^p \omega_0^K$ ,  $\nabla \nu_p^0 + \omega_p^0 = \nu_{pK}^0 \omega_0^K$ ,  $\nabla \Lambda_n^v + \omega_n^v = \Lambda_{nK}^v \omega_0^K$ .

Уравнения инфинитезимальных перемещений нового репера  $\{B_{\bar{J}}\}$  имеют вид:

$$dB_{\bar{J}} = \Omega_{\bar{J}}^{\bar{K}} B_{\bar{K}}. \quad (5)$$

Дифференцируя соотношения (4) с использованием соотношений (1) — (5), выразим формы  $\Omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$  через формы  $\omega_{\bar{J}}^{\bar{K}}$ :

$$\begin{aligned} \Omega_0^0 &= \omega_0^0 - \nu_p^0 (\omega_0^p - \nu_n^p \omega_0^n), \\ \Omega_q^0 &= \nu_{qK}^0 \omega_0^K + \nu_p^0 \nu_n^p \omega_q^n - \nu_p^0 \nu_q^0 (\omega_0^p - \nu_n^p \omega_0^n), \\ \Omega_0^p &= \omega_0^p - \nu_n^p \omega_0^n, \quad \Omega_q^p = \omega_q^p - \nu_n^p (\omega_q^n + \nu_q^0 \omega_0^n) + \nu_q^0 \omega_0^p, \\ \Omega_0^v &= \omega_0^v - \Lambda_n^v \omega_0^n, \quad \Omega_q^v = \omega_q^v - \Lambda_n^v (\omega_q^n + \nu_q^0 \omega_0^n) + \nu_q^0 \omega_0^v, \\ \Omega_0^n &= \omega_0^n, \quad \Omega_q^n = \omega_q^n - \nu_q^0 \omega_0^n, \\ \Omega_v^0 &= \omega_v^0 - \nu_p^0 (\omega_v^p - \nu_n^p \omega_v^n), \\ \Omega_n^0 &= \omega_n^0 + \nu_n^p \omega_p^0 + \Lambda_n^v \omega_v^0 - \nu_p^0 (\nu_{nK}^p \omega_0^K + \Lambda_n^v \omega_v^p - \nu_n^p \nu_n^q \omega_q^n - \nu_n^p \Lambda_n^v \omega_v^n), \\ \Omega_v^p &= \omega_v^p - \nu_n^p \omega_v^n, \quad \Omega_n^p = \nu_{nK}^p \omega_0^K + \Lambda_n^v \omega_v^p - \nu_n^p (\nu_n^q \omega_q^n + \Lambda_n^v \omega_v^n), \\ \Omega_v^n &= \omega_v^n - \Lambda_n^v \omega_v^n, \quad \Omega_n^n = \Lambda_{nK}^v \omega_0^K + \nu_n^p \omega_p^v - \Lambda_n^v (\nu_n^q \omega_q^n + \Lambda_n^k \omega_k^n), \\ \Omega_v^n &= \omega_v^n, \quad \Omega_n^n = \omega_n^n + \nu_n^q \omega_q^n + \Lambda_n^v \omega_v^n. \end{aligned} \quad (6)$$

Говорят [6], что система форм

$$\Theta_{\hat{a}}^0 = \Omega_{\hat{a}}^0 + \Gamma_{\hat{a}K}^0 \omega_0^K, \quad \Theta_{\hat{a}}^{\hat{v}} = \Omega_{\hat{a}}^{\hat{v}} - \delta_{\hat{a}}^{\hat{v}} \Omega_0^0 + \Gamma_{\hat{a}K}^{\hat{v}} \omega_0^K \quad (7)$$

определяет центропроективную линейную связность  $\nabla^\perp$  (нормальную центропроективную связность 1-го рода) в расслоении нормалей 1-го рода, если она удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [2]:

$$D\Theta_{\hat{a}}^0 = \Theta_{\hat{a}}^{\hat{\omega}} \Lambda \Theta_{\hat{\omega}}^0 + R_{\hat{a}PQ}^0 \omega_0^P \Lambda \omega_0^Q, \quad D\Theta_{\hat{a}}^{\hat{v}} = \Theta_{\hat{a}}^{\hat{\omega}} \Lambda \Theta_{\hat{\omega}}^{\hat{v}} + R_{\hat{a}PQ}^{\hat{v}} \omega_0^P \Lambda \omega_0^Q. \quad (8)$$

Для того чтобы система форм (7) удовлетворяла структурным уравнениям Картана — Лаптева (8), необходимо и достаточно, чтобы охваты компонент объекта связности  $\{\Gamma_{\hat{a}K}^0, \Gamma_{\hat{a}K}^{\hat{v}}\}$  имели следующий вид:

$$\begin{aligned} \Gamma_{vp}^0 &= \Gamma_{up}^v = \Gamma_{np}^v = \Gamma_{mn}^v = \Gamma_{up}^n = 0, \quad \Gamma_{un}^0 = \Gamma_{nu}^0 = x_n^0 \Lambda_u^0, \quad \Gamma_{mn}^0 = (x_n^0)^2, \\ \Gamma_{nn}^n &= 2x_n^0, \quad \Gamma_{un}^v = \Gamma_{nu}^v = \delta_u^v x_n^0, \quad \Gamma_{uv}^v = \delta_u^v \Lambda_w^0 + \delta_w^v \Lambda_u^0, \\ \Gamma_{nu}^n &= \Gamma_{un}^n = \Lambda_u^0, \quad \Gamma_{uv}^0 = \Lambda_u^0 \Lambda_v^0 + \Gamma_{uv}^n x_n^0, \quad \Gamma_{np}^0 = \Gamma_{np}^n x_n^0, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $x_n^0 \stackrel{def}{=} v_n^0 - \Lambda_n^v \Lambda_v^0$ ,  $v_n^0 = -\frac{1}{r}(v_{np}^p - \Lambda_{pq}^n v_n^p v_n^q)$ , а в качестве тензоров  $\Gamma_{np}^n, \Gamma_{uv}^n$  можно взять любой из следующих охватов:

$$\begin{aligned} \Gamma_{uv}^n &= 0, \quad \Gamma_{uv}^1 = V_{uv}^n, \quad [V_{uv}^n] = \begin{bmatrix} V_{ij}^n & \Lambda_{i\beta}^n \\ 0 & \Lambda_{\alpha\beta}^n \end{bmatrix}; \\ \Gamma_{np}^0 &= 0, \quad \Gamma_{np}^1 = \frac{1}{2}(\Lambda_{pn}^n + \lambda_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) + b_{pq}^n v_n^q, \\ \Gamma_{np}^2 &= \frac{1}{2}(\Lambda_{pn}^n + w_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) + b_{pq}^n v_n^q, \\ \Gamma_{np}^3 &= \frac{1}{2}(\Lambda_{pn}^n + h_p^0 + \Lambda_{p\alpha}^n \Lambda_n^\alpha) + b_{pq}^n v_n^q, \quad \Gamma_{np}^4 = b_p^n - v_p^0 + b_{pq}^n v_n^q, \\ \Gamma_{np}^5 &= \lambda_p^0 - v_p^0 + \Lambda_{qp}^n v_n^q, \quad \Gamma_{np}^6 = w_p^0 - v_p^0 + \Lambda_{qp}^n v_n^q, \\ \Gamma_{np}^7 &= h_p^0 - v_p^0 + b_{pq}^n v_n^q, \quad \Gamma_{np}^8 = C_p^0 + 3B_p^0 - 4v_p^0 + 2\Lambda_{qp}^n v_n^q, \\ \Gamma_{np}^9 &= C_p^0 - v_p^0 - \Lambda_{pq}^n v_n^q, \quad \Gamma_{np}^{10} = \Lambda_{pq}^0 \Gamma_n^q, \quad \Lambda_{[pq]}^n = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Структурные формы (6) при охватах (10), (11) обозначим соответственно  $\Theta_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}$ ,  $\Theta_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}$ , где  $\delta = \overline{0,1}$ ;  $\varepsilon = \overline{0,10}$ . Рассматривая попарные комбинации охватов (10), (11), получим 22 нормальные связности  $\nabla^{\perp}$ ,  $\nabla^{\perp}$ .

Следуя работе [5], запишем выражения форм  $\{\Theta_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}, \Theta_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}\}$ , определяющих связность  $\nabla^{\perp}$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \Theta_v^0 &= \omega_v^0 + \nu_q^0 (\nu_n^q \omega_v^n - \omega_v^q) + \Lambda_v^0 \Lambda_u^0 \omega_0^u + \Lambda_v^0 (x_n^0 - \Lambda_w^0 \Lambda_n^w) \omega_0^n, \\
 \Theta_n^0 &= \omega_n^0 + \nu_n^p \omega_p^0 + \Lambda_n^v \omega_v^0 - \nu_q^0 [\nu_{nK}^q \omega_0^K + \Lambda_n^v \omega_v^q - \nu_n^q (\nu_n^p \omega_p^n + \Lambda_n^v \omega_v^n)] + \\
 &+ x_n^0 \Lambda_v^0 \omega_0^v + x_n^0 (x_n^0 - \Lambda_v^0 \Lambda_n^v), \\
 \Theta_v^u &= \omega_v^u + \Lambda_v^0 \omega_0^u - \Lambda_n^u (\omega_v^n + \Lambda_v^0 \omega_0^n) - \delta_v^u [\omega_0^0 - \Lambda_w^0 \omega_0^w - \nu_p^0 \omega_0^p - \\
 &- (x_n^0 - \nu_p^0 \nu_n^p - \Lambda_w^0 \Lambda_n^w) \omega_0^n], \\
 \Theta_n^v &= \Lambda_{nK}^v \omega_0^K + \nu_n^p \omega_p^v - \Lambda_n^v (\nu_n^p \omega_p^n + \Lambda_n^w \omega_w^n) + x_n^0 (\omega_0^v - \Lambda_n^v \omega_0^n), \\
 \Theta_v^n &= \omega_v^n + \Lambda_v^0 \omega_0^n, \quad \Theta_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 + \Lambda_v^0 \omega_0^v + \nu_p^0 \omega_0^p + \nu_n^p \omega_p^n + \Lambda_n^v \omega_v^n + \\
 &+ (2x_n^0 - \Lambda_v^0 \Lambda_n^v - \nu_p^0 \nu_n^p) \omega_0^n.
 \end{aligned} \tag{12}$$

В силу соотношений (10) — (12) находим зависимости между формами  $\{\Theta_{\hat{u}}^0, \Theta_{\hat{u}}^{\hat{v}}\}$  и формами (12):

$$\begin{aligned}
 \Theta_v^0 &= \Theta_v^0 + \Gamma_{vu}^n x_n^0 (\omega_0^u - \Lambda_n^u \omega_0^n), \quad \Theta_n^0 = \Theta_n^0 + \Gamma_{nq}^{\varepsilon} x_n^0 (\omega_0^q - \nu_n^q \omega_0^n), \\
 \Theta_v^u &= \Theta_v^u, \quad \Theta_n^v = \Theta_n^v, \\
 \Theta_v^n &= \Theta_v^n + \Gamma_{vu}^n (\omega_0^u - \Lambda_n^u \omega_0^n), \quad \Theta_n^n = \Theta_n^n + \Gamma_{nq}^n (\omega_0^q - \nu_n^q \omega_0^n).
 \end{aligned} \tag{13}$$

В результате справедлива

**Теорема 1.** *На оснащённом в смысле Нордена — Картана  $\Lambda$ -подрасслоении данного  $WH$ -распределения в расслоении его нормалей 1-го рода индуцируется 22 нормальные связности  $\nabla^{\perp}, \nabla^{\perp}$ , определяемые системой словых форм  $\{\Theta_{\hat{u}}^0, \Theta_{\hat{u}}^{\hat{v}}\}$ , связанных зависимостями (13), причем для  $WH$ -распределения с полем симметрического тензора  $\Lambda_{pq}^n$  связности  $\nabla^{\perp}, \nabla^{\perp}$  совпадают.*

3. Пусть  $\Lambda$ -подрасслоение  $WH$ -распределения оснащено в смысле Нордена — Бортолотти. В силу наличия подмногооб-

разия  $\overline{\mathcal{WH}}$  [4], двойственного  $\mathcal{WH}$ , системам форм  $\{\overline{\Theta}_{\hat{u}}^0, \overline{\Theta}_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}\}$  соответствуют двойственные им системы форм  $\{\overline{\Theta}_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}, \overline{\Theta}_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}\}$ , которые определяют нормальные связности  $\overline{\nabla}^\perp$  в расслоении нормалей 2-го рода, двойственные по отношению к связностям  $\overline{\nabla}^\perp$  относительно инволютивного преобразования  $J$  [4].

Формы  $\{\overline{\Theta}_{\hat{u}}^0, \overline{\Theta}_{\hat{u}}^{\delta\varepsilon}\}$  имеют следующие строения:

$$\begin{aligned}
 \overline{\Theta}_v^0 &= V_{wv}^n [V_q^0 V_n^q \omega_0^w + \Lambda_n^w \Lambda_n^u \omega_u^n + \Lambda_n^w (\mu_n^0 + \Lambda_v^0 \Lambda_n^v) \omega_0^n + \omega_n^w + v_n^q \omega_q^w], \\
 \overline{\Theta}_n^0 &= \omega_n^0 - \lambda_v^0 \omega_n^v - v_p^0 \omega_n^p + v_n^p [v_{pK}^0 \omega_0^K - \Lambda_v^0 \omega_p^v - v_p^0 (v_q^0 \omega_0^q + \Lambda_u^0 \omega_0^u)] + \\
 &+ \mu_n^0 [\Lambda_n^v \omega_v^n + (\mu_n^0 + \lambda_v^0 \Lambda_n^v) \omega_0^n], \\
 \overline{\Theta}_v^u &= V_n^{uv} [dV_{wv}^n + (\Lambda_{wn}^n + \Lambda_w^0) \Lambda_n^x V_{xv}^n \omega_0^n - V_{xv}^n (\Lambda_w^0 \omega_0^x + \omega_w^x)] + \\
 &+ \Lambda_n^x \Lambda_{xv}^n \omega_0^u + \delta_v^u [\Lambda_n^w \omega_w^n + v_n^p \omega_p^n + (\mu_n^0 + \Lambda_w^0 \Lambda_n^w + v_p^0 v_n^p) \omega_0^n + \omega_n^u], \\
 \overline{\Theta}_v^n &= V_{wv}^n (\Lambda_n^w \omega_0^n - \omega_w^v), \\
 \overline{\Theta}_n^v &= V_n^{vw} [\Lambda_{wK}^0 \omega_0^K + \Lambda_w^0 (v_p^0 \omega_0^p + \Lambda_u^0 \omega_0^u) + \mu_n^0 (\Lambda_{wn}^n + \Lambda_w^0) \omega_0^n + v_p^0 \omega_w^p] + \\
 &+ \mu_n^0 \omega_0^v, \\
 \overline{\Theta}_n^n &= \omega_n^n - \omega_0^0 + v_n^p \omega_p^n - \Lambda_n^v \omega_v^n + \Lambda_n^0 \omega_0^u + v_p^0 \omega_0^p + \\
 &+ (2\mu_n^0 + \Lambda_v^0 \Lambda_n^v + v_p^0 v_n^p) \omega_0^n, \\
 \overline{\Theta}_v^0 &= \overline{\Theta}_v^0 + \overline{\Gamma}_{vu}^n \mu_n^0 [\omega_0^u + V_n^{uv} (\Lambda_{wn}^n + \Lambda_w^0) \omega_0^n], \\
 \overline{\Theta}_n^0 &= \overline{\Theta}_n^0 + \overline{\Gamma}_{nq}^n \mu_n^0 [\omega_0^q + \Lambda_n^{qp} (\Lambda_{pn}^n + v_p^0) \omega_0^n], \\
 \overline{\Theta}_v^u &= \overline{\Theta}_v^u, \quad \overline{\Theta}_n^u = \overline{\Theta}_n^u, \quad \overline{\Theta}_v^n = \overline{\Theta}_v^n + \overline{\Gamma}_{vu}^n [\omega_0^u + V_n^{uv} (\Lambda_{wn}^n + \Lambda_w^0) \omega_0^n], \\
 \overline{\Theta}_n^n &= \overline{\Theta}_n^n + \overline{\Gamma}_{nq}^n [\omega_0^q + \Lambda_n^{qp} (\Lambda_{pn}^n + v_p^0) \omega_0^n], \text{ где } \mu_n^0 = \bar{x}_n^0.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Каждая из систем форм  $\{\overline{\Theta}_i^0, \overline{\Theta}_i^1\}$  удовлетворяет соответствующим структурным уравнениям Картана — Лаптева [2]. Итак, справедлива теорема, двойственная теореме 1.

**Теорема 2.** *На оснащённом в смысле Нордена — Бортолотти  $\Lambda$ -подрасслоении данного  $WH$ -распределения в расслоении его нормалей 2-го рода индуцируются 22 нормальные связности  $\overline{\nabla}^\perp$ , определяемые системой форм (14), причем для  $WH$ -распределения с полем симметрического тензора  $\Lambda_{pq}^n$  связности  $\overline{\nabla}^{\perp 4}$  и  $\overline{\nabla}^{\perp 5}$  совпадают.*

#### **Список литературы**

1. Волкова С.Ю. Поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов  $S$ -распределения / Балтийский военно-морской институт. Калининград, 2000. Деп. ВИНТИ, №343 — В2001. 09.02.2001.
2. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. об-ва, 1953. Т. 2. С. 275—382.
3. Максакова Т.Ю. Вырожденные трехсоставные распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2005. Вып. 36. С. 59—64.
4. Максакова Т.Ю. Двойственный образ  $WH$ -распределения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 59—65.
5. Столяров А.В. Двойственные нормальные связности на регулярной неголономной гиперполюсе // Изв. НАНИ ЧР (Физ.-мат. науки). 1996. №6. С. 9—14.
6. Чакмазян А.В. Связности в нормальных расслоениях нормализованного многообразия  $V_m$  в  $P_n$  // Проблемы геометрии / ВИНТИ. М., 1978. Т. 10. С. 55—74.

Т. Maksakova

#### **DUAL NORMAL CONNECTIONS ON $\Lambda$ -SUBBUNDLE OF $WH$ -DISTRIBUTION IN PROJECTIVE SPACE**

Degenerate three-part distributions of the projective space are considered. We introduce dual normal connections induced in the bundles of the 1-st and 2-nd kind normals of  $\Lambda$ -subbundle of the given  $WH$ -distribution.