Теорема. В специальной системе координат структурные тензоры трехмерной почти контактной метрической структуры 3-го класса Танно и операторы алгебры Ли ее инфинитезимальных автоморфизмов имеют вид (6).

Список литературы

1. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. М., 2003.
2. *Blair David E.* Contact manifolds in Riemannian geometry, Leet. Notes Math, 1976. 509.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. М., 1950.
4. *Эйзенхарт Л. П.* Риманова геометрия. М., 1948.
5. *Tanno Shukichi*. The automorphism groups of almost contact riemannian manifolds. Tohoku Math. J., 1969. 21, 1. P. 21—38.

N. Tyapin

ON INFINITESIMAL AUTOMORFISMS
OF ALMOST CONTACT STRUCTURE

Lie algebra of infinitesimal automorphisms and structure tensors of three-dimensional almost contact metric structure of 3-rd class Tanno [5] are found.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

ДВОЙСТВЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ГИПЕРПЛОСКОСТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПРОСТРАНСТВЕ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

Найдены двойственные пространства аффинной связности, индуцируемые оснащением регулярного

распределения гиперплоскостных элементов M в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$.

Индексы в работе принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, P, Q, S = \overline{1, n}; \quad \bar{I}, \bar{L}, \bar{K} = \overline{0, n}; \quad i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, r^I_{PQ} и r^I_{KPQ} — соответственно тензоры кручения и кривизны пространства $A_{n,n}$.

Известно [3], что с пространством $A_{n,n}$ ассоциируется пространство проективной связности $P_{n,n}$, определяемое системой форм Пфаффа $\omega^{\bar{I}}_{\bar{L}}$:

$$\omega^I_0 = \theta^I, \, \omega^0_0 = -\frac{1}{n+1}\theta^K_K, \, \omega^0_I = 0, \, \omega^I_L = \theta^I_L - \frac{1}{n+1}\delta^I_L \theta^K_K;$$

при этом пространство $P_{n,n}$ является проективным P_n тогда и только тогда, когда исходное пространство $A_{n,n}$ вырождается в аффинное A_n $(r^I_{PQ} = r^I_{KPQ} \equiv 0)$.

Определение 1. *Будем говорить, что в пространстве аффинной связности $A_{n,n}$ задано распределение M (1-го рода [4]) гиперплоскостных элементов (A, Π_{n-1}), $A \in \Pi_{n-1}$, если это подмногообразие задано в пространстве проективной связности $P_{n,n}$, ассоциированном с $A_{n,n}$.*

В пространстве $P_{n,n}$ распределение M в репере нулевого порядка $\{A_0, A_J\}$ (где $A_0 \equiv A$, $A_i \in \Pi_{n-1}$) задается [4] уравнениями:

$$\omega^n_i = \Lambda^n_{iK}\omega^K_0. \tag{1}$$

Двукратное продолжение уравнений системы (1) приводит к дифференциальным уравнениям компонент полей фундаментальных объектов первого $\{\Lambda^n_{iK}\}$ и второго $\{\Lambda^n_{iK}, \Lambda^n_{iKL}\}$ порядков распределения M в $A_{n,n}$ (см. [6]).

Следуя работе [6], можно показать, что регулярное (то есть $\Lambda \overset{def}{=} \left|\Lambda^n_{ij}\right| \neq 0$) распределение M в $A_{n,n}$ индуцирует:

— во второй дифференциальной окрестности пространство проективной связности $\overline{P}_{n,n}$, двойственное $P_{n,n}$ относительно инволютивного преобразования форм связности по закону:

$$\overline{\omega}^i_0 = \omega^i_0 + \Lambda^n_{kn}\Lambda^{ik}_n\omega^n_0,\ \overline{\omega}^n_0 = \omega^n_0,\ \overline{\omega}^0_0 = \omega^0_0 - \frac{1}{n+1}\Lambda_K\omega^K_0,$$

$$\overline{\omega}^n_n = \omega^n_n - \frac{1}{n+1}\Lambda_K\omega^K_0,\ \overline{\omega}^n_i = -\Lambda^n_{ki}\omega^k_0,\ \overline{\omega}^0_i = \Lambda^n_{ki}\omega^k_n, \tag{2}$$

$$\overline{\omega}^i_n = -\Lambda^{ik}_n\omega^0_k = 0, \overline{\omega}^k_i = \omega^k_i + (\Lambda^{kj}_n\Lambda^n_{jiL} - \delta^k_i\frac{\Lambda_L}{n+1})\omega^L_0,\ \overline{\omega}^0_n = \omega^0_n = 0,$$

причем пространства $P_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ могут быть проективными лишь одновременно;

— в первой дифференциальной окрестности многообразие $\overline{M}$ в $\overline{P}_{n,n}$, двойственное исходному распределению M.

Доказано, что на оснащенном в смысле А. П. Нордена [2] регулярном распределении M в $A_{n,n}$ индуцируются две двойственные аффинные связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ (определяемые соответственно системами форм $\left\{\overset{1}{\theta}{}^i_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\right\}$ и $\left\{\overset{2}{\theta}{}^i_0, \overset{2}{\theta}{}^i_j\right\}$), обобщенно сопряженные относительно поля тензора Λ^n_{ij} вдоль любой кривой, принадлежащей распределению M в $A_{n,n}$. Например, формы $\left\{\overset{1}{\theta}{}^i_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\right\}$ имеют следующее строение:

$$\overset{1}{\theta}{}^i_0 = \omega^i_0 - \nu^i_n\omega^n_0,\ \overset{1}{\theta}{}^i_j = \omega^i_j - \nu^i_n\omega^n_j - \delta^i_j(\omega^0_0 - \overset{1}{\theta}{}^k_0\,\nu^0_k) +$$
$$+\nu^0_j\,\overset{1}{\theta}{}^i_0 - (\nu^i_{nj} - \Lambda^n_{kj}\nu^k_n\nu^i_n)\omega^n_0.$$

В случае пространств $A_{n,n}$ и $\overline{P}_{n,n}$ с нулевым кручением для распределения M с полем симметричного тензора Λ^n_{ij} связности $\overset{1}{\nabla}$ и $\overset{2}{\nabla}$ совпадают тогда и только тогда, когда нормализация распределения M есть нормализация Михэйлеску [7] и соприкасающиеся гиперквадрики с многообразием M имеют касание третьего порядка.

Предположим, что распределение M в $A_{n,n}$ оснащено в смысле Э. Картана [8], то есть на M в $A_{n,n}$ задано поле геометрического объекта $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$ [4]:

$$d\nu^i_n + \nu^l_n\omega^i_l - \nu^i_n\omega^n_n + \omega^i_n = \nu^i_{nK}\omega^K_0 ,$$

$$d\nu^0_n + \nu^0_n\omega^0_0 - \nu^0_n\omega^n_n + \omega^0_n (= 0) = \nu^0_{nK}\omega^K_0 ,$$

определяющего поле оснащающих точек

$$K_n = A_n + \nu^i_n A_i + \nu^0_n A_0 .$$

Заметим, что поле подобъекта $\{\nu^i_n\}$ определяет поле инвариантных нормалей первого рода на распределении M в $A_{n,n}$.

Известно [7], что обобщенная точка Кенигса нормали первого рода ν^i_n определяется геометрическим объектом $\{\nu^i_n, \nu^0_n\}$, где

$$\nu^0_n = -\frac{1}{n-1}(\nu^s_{ns} - \Lambda^n_{st}\nu^s_n\nu^t_n) . \qquad (3)$$

Нормализация распределения гиперплоскостных элементов M полями тензора ν^i_n и квазитензора ν^0_i [6]

$$d\nu^i_n - \nu^i_n\omega^n_n + \nu^j_n\omega^i_j + \omega^i_n = \nu^i_{nK}\omega^K_0 ,$$

$$d\nu^0_i + \nu^0_i\omega^0_0 - \nu^0_j\omega^j_i + \omega^0_i (= 0) = \nu^0_{iK}\omega^K_0$$

определяет поле тензора c^0_J:

$$c^0_J = \begin{cases} \nu^0_s, \ при \ J = s, \\ \nu^0_n - \nu^0_k\nu^k_n, \ при \ J = n, \end{cases} \qquad dc^0_J - c^0_K\omega^K_J + c^0_J\omega^0_0 = c^0_{JK}\omega^K_0 ,$$

где в качестве функций ν_n^0 можно взять, например, функции строения (3). Поле тензора c_J^0 задает оснащение в смысле А. П. Нордена [2] пространства $P_{n,n}$.

Введем в рассмотрение систему форм $\left\{\overset{1}{\Omega}{}_{K}^{J}\right\}$:

$$\overset{1}{\Omega}{}_0^i = \omega_0^i - \nu_n^i \omega_0^n, \quad \overset{1}{\Omega}{}_0^n = \omega_0^n,$$
$$\overset{1}{\Omega}{}_i^j = \omega_i^j - \nu_n^j \omega_i^n - \delta_i^j (\omega_0^0 - \nu_s^0 \omega_0^s - c_n^0 \omega_0^n) + \nu_i^0 \overset{1}{\Omega}{}_0^j, \tag{4}$$
$$\overset{1}{\Omega}{}_i^n = \omega_i^n + \nu_i^0 \omega_0^n, \; \overset{1}{\Omega}{}_n^i = (\nu_{nK}^i - \nu_n^i \nu_n^s \Lambda_{sK}^n)\omega_0^K + \nu_n^0 \overset{1}{\Omega}{}_0^i,$$
$$\overset{1}{\Omega}{}_n^n = \omega_n^n + \nu_n^s \omega_s^n - \omega_0^0 + \nu_s^0 \omega_0^s + (\nu_n^0 + c_n^0)\omega_0^n.$$

Система форм (4) удовлетворяет структурным уравнениям Картана — Лаптева [1; 5], а следовательно, определяет пространство аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$; $\left\{\overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0PQ}^{J}\right\}$, $\left\{\overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{IPQ}^{J}\right\}$ — соответственно тензор кручения и тензор кривизны. Тензор кручения $\left\{\overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0PQ}^{J}\right\}$, например, имеет строение:

$$\overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0st}^i = r_{st}^i - \nu_n^i r_{st}^n, \; \overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0sn}^i = r_{sn}^i - \nu_n^i r_{sn}^n + \nu_n^t \overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0st}^i,$$
$$\overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0st}^n = r_{st}^n, \; \overset{1}{\mathfrak{R}}{}_{0sn}^n = r_{sn}^n + \nu_n^l r_{sl}^n. \tag{5}$$

Из соотношений (5) следует, что пространство $\overset{1}{A}_{n,n}$ имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное пространство $A_{n,n}$ — без кручения.

В случае, когда нормаль второго рода не лежит в несобственной гиперплоскости, то есть $\nu_i^0 \neq 0$, имеют место и двойственные построения. Действительно, задание поля нормалей второго рода ν_i^0 регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ определяет оснащение в смысле Э. Картана двойственного образа $\overline{M}$ полем геометрического объекта $\{\overline{\nu}_n^i, \overline{\nu}_n^0\}$:

$$d\overline{\nu}_n^i + \overline{\nu}_n^l \overline{\omega}_l^i - \overline{\nu}_n^i \overline{\omega}_n^n + \overline{\omega}_n^i = \overline{\nu}_{nK}^i \overline{\omega}_0^K, \; d\overline{\nu}_n^0 + \overline{\nu}_n^0 \overline{\omega}_0^0 - \overline{\nu}_n^0 \overline{\omega}_n^n + \overline{\omega}_n^0 = \overline{\nu}_{nK}^0 \overline{\omega}_0^K,$$

где

$$\overline{\nu}_n^i = -\Lambda_n^{ik} \nu_k^0, \quad \overline{\nu}_n^0 = \frac{1}{n-1} \Lambda_n^{ij} (\nu_{ji}^0 - \nu_i^0 \nu_j^0). \tag{6}$$

В силу двойственности [6] утверждаем, что нормализация регулярного распределения M в $A_{n,n}$ индуцирует пространство аффинной связности $\overset{2}{A}_{n,n}$, двойственное пространству $\overset{1}{A}_{n,n}$; формы связности пространства $\overset{2}{A}_{n,n}$ в силу (2), (4), (6) имеют строение:

$$\overset{2}{\Omega}{}_0^i = \omega_0^i + (\nu_k^0 + \Lambda_{kn}^n) \Lambda_n^{ik} \omega_0^n, \; \overset{2}{\Omega}{}_0^n = \omega_0^n, \; \overset{2}{\Omega}{}_i^n = \Lambda_{ki}^n (\nu_n^k \omega_0^n - \omega_0^k),$$

$$\overset{2}{\Omega}{}_n^i = \Lambda_n^{il} (\nu_l^0 \nu_k^0 - \nu_{lk}^0) \omega_0^k - \Lambda_n^{ik} \nu_{kn}^0 \omega_0^n + \frac{1}{n+1} \Lambda_n^{kl} (\nu_{lk}^0 - \nu_l^0 \nu_k^0) \overset{2}{\Omega}{}_0^i,$$

$$\overset{2}{\Omega}{}_n^n = \omega_n^n - \omega_0^0 + \nu_n^k \Lambda_{kS}^n \omega_0^S + \Lambda_n^{sk} \Lambda_{sl}^n \nu_k^0 \omega_0^l + \\ + \left[\frac{2}{n-1} \Lambda_n^{kl} (\nu_{lk}^0 - \nu_k^0 \nu_l^0) + \nu_n^l \nu_l^0 \right] \omega_0^n,$$

$$\overset{2}{\Omega}{}_i^j = \omega_i^j + \Lambda_n^{jl} \Lambda_{liK}^n \omega_0^K - \Lambda_n^{jl} \Lambda_{ki}^n \nu_l^0 \omega_0^k + \delta_i^j \Big[\omega_0^0 - \Lambda_{kS}^n \nu_n^k \omega_0^S - \\ - \frac{1}{n-1} \Lambda_n^{kl} (\nu_{lk}^0 - \nu_k^0 \nu_l^0) \omega_0^n + \nu_n^k (\nu_k^0 - \Lambda_{kn}^n) \omega_0^n \Big] + \Lambda_{ki}^n \nu_n^k \overset{2}{\Omega}{}_0^j.$$

Теорема 1. *Нормализация регулярного распределения гиперплоскостных элементов M в $A_{n,n}$ индуцирует два двойст-*

венных пространства аффинной связности $\overset{1}{A}_{n,n}$ *и* $\overset{2}{A}_{n,n}$*; причем пространство* $\overset{1}{A}_{n,n}$ *(*$\overset{2}{A}_{n,n}$*) имеет нулевое кручение тогда и только тогда, когда исходное пространство аффинной связности* $A_{n,n}$ *(проективной связности* $\overline{P}_{n,n}$*) — без кручения.*

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 2. *Аффинные связности, определяемые системами слоевых форм* $\left\{\overset{1}{\theta}{}^i_0, \overset{1}{\theta}{}^i_j\right\}$ *и* $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^i_0, \overset{1}{\Omega}{}^i_j\right\}$ *(*$\left\{\overset{2}{\theta}{}^i_0, \overset{2}{\theta}{}^i_j\right\}$ *и* $\left\{\overset{2}{\Omega}{}^i_0, \overset{2}{\Omega}{}^i_j\right\}$*), совпадают тогда и только тогда, когда направление нормали первого рода* ν^i_n *(*$\overline{\nu}^i_n$*) в связности пространства* $\overset{1}{A}_{n,n}$ *(*$\overset{2}{A}_{n,n}$*) переносится параллельно вдоль любой кривой, принадлежащей распределению* M *(*$\overline{M}$*) в* $A_{n,n}$*; при этом нормальная точка нормали* ν^i_n *совпадает с ее точкой Кенигса.*

Теорема 3. *Направление нормали первого рода* ν^i_n *распределения гиперплоскостных элементов* M *в* A_n *(*$n \geq 3$*) обладает свойством абсолютного параллелизма относительно связности* $\left\{\overset{1}{\Omega}{}^i_0, \overset{1}{\Omega}{}^i_j\right\}$ *пространства* $\overset{1}{A}_{n,n}$ *тогда и только тогда, когда точка Кенигса этой нормали неподвижна.*

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. мат. о-ва. 1953. Т. 2. С. 275—382.
2. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.
3. *Столяров А. В.* Двойственная геометрия нормализованного пространства аффинной связности // Вестн. Чувашск. гос. пед. ун-та. 2005. №4. С. 21—27.
4. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР. 1971. Т. 3. С. 49—94.

5. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М. и др.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1979. Т. 9.

6. *Столяров А. В.* Двойственная теория оснащенных многообразий. Чебоксары, 1994.

7. *Остиану Н. М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара. Ин-т науч. информ. АН СССР. 1973. Т. 4. С. 71—120.

8. *Cartan E.* Les éspaces á connexion projective // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. М., 1937. №4. С. 147—159.

A. Khristoforova

DUAL SPACES OF AFFINE CONNECTION
ON THE DISTRIBUTION OF HYPERPLANE ELEMENTS
IN THE SPACE OF AFFINE CONNECTION

The dual spaces of affine connection induced by the framed regular distribution *M* of hyperplane elements are found.

УДК 514.764.322

И. И. Цыганок, Е. С. Степанова

(*Российский университет кооперации, г. Владимир; Финансовая академия при Правительстве РФ, г. Москва*)

ИНТЕГРАЛЫ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В СВЯЗНОСТИ ЧЕНЦОВА — АМАРИ

На многообразии распределений вероятностей в связности Ченцова — Амари найдены интегралы уравнений геодезических. В отличие от известного результата (см. [1, с. 199—201] эти интегралы получены непосредственным интегрированием уравнений геодезических линий. Приведенный в статье результаты был анонсирован в [2].