Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1973.Вып.3.С.41-49.

УДК 514.75

СВЯЗНОСТЬ В МНОГООБРАЗИИ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ, ИНДУЦИРОВАННОМ ГИПЕРКОНГРУЭНЦИЕЙ

В.П.П а п е н к о

(Калининградское ВИУИВ)

Рассмотрено ($n-1$)-параметрическое невырожденное многообразие (гиперконгруэнция K_{n-1}) пар фигур (P,Q) ,состоящих из невырожденной гиперквадрики Q и неинцидентной ей точки P n-мерного проективного пространства P_n .При этом точка P описывает гиперповерхность S_{n-1} ,а гиперквадрика Q – ($n-1$)-параметрическое многообразие.

Отнесем многообразие K_{n-1} к реперу $R=\{A_0,A_i\}$ ($i,j,\ldots=\overline{1,n}$), у которого вершины A_i помещены в гиперплоскость L_{n-1} ,полярно-сопряженную точке P относительно гиперквадрики Q .Уравнение гиперквадрики Q и система уравнений Пфаффа гиперконгруэнции K_{n-1} записывается в виде $a_{ij}x^i x^j+2a_{0i}x^0x^i+(x^0)^2=0$ ($a_{ij}=a_{ji}$),

$$\Delta a_{i'j'} = a_{i'j'\alpha}\Delta x^\alpha, \qquad \Delta x^n = b_\alpha \Delta x^\alpha, \qquad \omega_i^0 = \Lambda_{i\alpha}\Delta x^\alpha, \tag{1}$$

где $i',j',\ldots=\overline{0,n}$; $\alpha,\beta,\ldots=\overline{1,n-1}$ и $\Delta a_{i'j'}$, Δx^i являются структурными формами соответственно пространства гиперквадрик Q и точечного проективного пространства P_n [1].Базисные формы Δx^α удовлетворяют уравнениям

$$d\Delta x^\alpha = \Delta x^\beta \wedge \theta_\beta^\alpha, \tag{2}$$

где $\theta_\beta^\alpha=\omega_\beta^\alpha-\delta_\beta^\alpha(\omega_0^0+x^k\omega_k^0)-x^\alpha\omega_\beta^0+b_\beta(\omega_n^\alpha-x^\alpha\omega_n^0)$,а вторичные формы ω_0^i , ω_j^i , ω_0^0 -уравнениям.

$$\begin{cases} d\omega_0^i = \omega_0^j \wedge (\omega_j^i-\delta_j^i\omega_0^0), \\ d\omega_j^i = \omega_j^k\wedge\omega_k^i + \Delta x^\alpha\wedge(\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i), \\ d\omega_0^0 = \Delta x^\alpha \wedge(-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k). \end{cases} \tag{3}$$

Из уравнений (2),(3) заключаем,что с гиперконгруэнцией K_{n-1} ассоциируется главное расслоение $G_\tau(S_{n-1})$,для которого базой является гиперповерхность S_{n-1} ,а типовым слоем - подгруппа стационарности G_τ ($\tau=n^2+n$) гиперплоскости L_{n-1}. Это расслоение является сужением расслоения $G_\tau(P_n)$[1] на базу S_{n-1} ,поэтому естественно ожидать сохранение многих результатов.

В главном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ зададим фундаментально-групповую связность по Г.Ф.Лаптеву,используя для этого формы

$$\tilde\omega_0^i = \omega_0^i-\Gamma_\alpha^i\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega_j^i=\omega_j^i-\Gamma_{j\alpha}^i\Delta x^\alpha, \qquad \tilde\omega_0^0=\omega_0^0-\Gamma_\alpha\Delta x^\alpha,$$

где $\Gamma=\{\Gamma_\alpha^i,\Gamma_{j\alpha}^i,\Gamma_\alpha\}$-набор некоторых функций.Внешние дифференциалы форм $\tilde\omega_0^i$, $\tilde\omega^i$, $\tilde\omega_0^0$ удовлетворяют уравнениям

$$d\tilde\omega_0^i=\tilde\omega_0^0\wedge\tilde\omega_0^i+\tilde\omega_0^j\wedge\tilde\omega_j^i+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_\alpha^i-\Gamma_\beta^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Gamma_\alpha\omega_0^i-\Gamma_{j\alpha}^i\omega_0^j)+$$
$$+(\Gamma_\gamma^i x^\gamma\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta}\Gamma_\gamma^i x^\gamma-\Gamma_\alpha\Gamma_\beta^i-\Gamma_\alpha^j\Gamma_{j\beta}^i-x^k\Lambda_{k\alpha}\Gamma_\beta^i)\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega_j^i=\tilde\omega_j^k\wedge\tilde\omega_k^i+\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_{j\alpha}^i-\Gamma_{j\beta}^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i)+[\Gamma_{j\gamma}^i x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})-$$
$$-\Gamma_{j\alpha}^k\Gamma_{k\beta}^i-\Gamma_{j\beta}^i x^k\Lambda_{k\alpha}]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta,$$

$$d\tilde\omega_0^0=\Delta x^\alpha\wedge(\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega_n^\beta-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k)+[\Gamma_\alpha x^k\Lambda_{k\beta}+$$
$$+\Gamma_\gamma x^\gamma(\Lambda_{\alpha\beta}+b_\alpha\Lambda_{n\beta})]\Delta x^\alpha\wedge\Delta x^\beta.$$

Отсюда в силу теоремы Картана-Лаптева связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ задается полем объекта связности Γ на базе S_{n-1}, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям

$$\nabla\Gamma_\alpha^i-\Gamma_\beta^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Gamma_\alpha\omega_0^i-\Gamma_{j\alpha}^i\omega_0^j=\Gamma_{\alpha\beta}^i\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma_{j\alpha}^i-\Gamma_{j\beta}^i b_\alpha\omega_n^\beta+\Lambda_{j\alpha}\omega_0^i=\Gamma_{j\alpha\beta}^i\Delta x^\beta,$$
$$\nabla\Gamma_\alpha-\Gamma_\beta b_\alpha\omega_n^\beta-\Lambda_{k\alpha}\omega_0^k=\Gamma_{\alpha\beta}\Delta x^\beta.$$

Т е о р е м а 1. Присоединение к каждой паре фигур (P,Q) точки B, не принадлежащей гиперплоскости L_{n-1} ,позволяет задать связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$.

С л е д с т в и е. Связность в ассоциированном расслоении $G_\tau(S_{n-1})$ возникает естественным образом,если в качестве оснащающей точки B взять точку P .

Т е о р е м а 2. Точка B переносится параллельно в связности Γ тогда и только тогда,когда она неподвижна.

Т е о р е м а 3. Подобъект линейной связности $\Gamma_{j\alpha}^i$ объекта связности Γ характеризуется проекцией на гиперплоскость L_{n-1} смежной с ней гиперплоскости $L_{n-1}+dL_{n-1}$ из центра B .

Таким образом,изменение размерности многообразия пар фигур (P,Q) не повлияло на свойства фундаментально-групповой связности ассоциированного расслоения,типовым слоем которого является подгруппа стационарности гиперплоскости L_{n-1} .

Библиографический список

I. Ц а п е н к о В.П. Связность в расслоении, ассоциированном с гиперкомплексом пар фигур (P,Q) //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1982. Вып.13.С.107-111.

УДК 514.76

φ-СОПРЯЖЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ДЕФОРМАЦИИ

М.А.Ч е ш к о в а

(Алтайский государственный университет)

Пусть M_n - n-мерное C^∞-многообразие, $\mathcal{F}(M_n)$ - R-алгебра дифференцируемых на M_n функций, $T^r_s(M_n)$ - $\mathcal{F}$ - модуль дифференцируемых тензорных полей на M_n типа (r,s), ∇-аффинная связность. Задание тензорного поля $\mathcal{D}\in T^1_2(M_n)$ определяет алгебраическую операцию $X\circ Y=\mathcal{D}(X,Y)$, $X,\ Y\in T^1_0(M_n)$, относительно которой $T^1_0(M_n)$ -алгебра деформации [1]. Обозначается $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$ [2].

Пусть $\varphi\in T^1_1(M_n)$, $\det\|\varphi_x\|\neq 0$, $\forall x\in M_n$.

О п р е д е л е н и е 1. Алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ называется φ-сопряженной алгебре $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D})$, если

$$\mathcal{D}^*(X,Y)=\varphi^{-1}\mathcal{D}(X,\varphi Y). \tag{1}$$

Имеет место диаграмма
$$\begin{tikzcd} \nabla \arrow[r, "\mathcal{D}"] \arrow[d, "A"'] & \overline{\nabla} \arrow[d, "\overline{A}"] \\ \overset{*}{\nabla} \arrow[r, "\overset{*}{\mathcal{D}}"] & \overset{*}{\overline{\nabla}} \end{tikzcd},$$
где $\overline{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+\mathcal{D}(X,Y)$, $\overset{*}{\nabla}_X Y=\varphi^{-1}\nabla_X\varphi Y$ -связность, φ,-сопряженная [3] связности ∇, $\overset{*}{\overline{\nabla}}$ - φ- сопряженная связности $\overline{\nabla}$.

Т е о р е м а 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) алгебра $\mathcal{U}(M_n,\overset{*}{\mathcal{D}})$ коммутативна; 2) $(\bar d\varphi)(X,Y)=(d\varphi)(X,Y)$; 3) $\overset{*}{\overline{S}}=\overset{*}{S}$,

$$2)\ (\bar d\varphi)(X,Y)=(d\varphi)(X,Y). \tag{2}$$

$$3)\ \overset{*}{\overline{S}}=\overset{*}{S},$$

$$4)\ \{(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y)-(\overline{\nabla}_Y\varphi)(X)\}-\{(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_Y\varphi)(X)\}=$$
$$=\mathcal{D}(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X),$$

где $\overset{*}{S}$, $\overset{*}{\overline{S}}$ -кручения связностей $\overset{*}{\nabla}$, $\overset{*}{\overline{\nabla}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y)=\overline{\nabla}_X\varphi Y-\varphi\overline{\nabla}_X Y=(\nabla_X\varphi)(Y)+\varphi(\mathcal{D}^*(X,Y)-\mathcal{D}(X,Y)),$$

$$(\bar d\varphi)(X,Y)=\overline{\nabla}_X\varphi Y-\overline{\nabla}_Y\varphi X-\varphi[X,Y]=(d\varphi)(X,Y)+\varphi(\mathcal{D}^*(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X)),$$

$$\overset{*}{S}(X,Y)=\overset{*}{\nabla}_X Y-\overset{*}{\nabla}_Y X-[X,Y]=\varphi^{-1}(d\varphi)(X,Y), \tag{3}$$

$$\overset{*}{\overline{S}}(X,Y)=\varphi^{-1}(\bar d\varphi)(X,Y),$$

$$A(X,Y)=\overset{*}{\nabla}_X Y-\nabla_X Y=\varphi^{-1}(\nabla_X\varphi)(Y),$$

$$\overline{A}(X,Y)=\overset{*}{\overline{\nabla}}_X Y-\overline{\nabla}_X Y=\varphi^{-1}(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y).$$

Из (3) следует (2).

С л е д с т в и е 1. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ -параллельно в связности ∇; 2) $\nabla=\nabla^*$; 3) $(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y)=\varphi(\mathcal{D}^*-\mathcal{D})(X,Y)$.

Т е о р е м а 2. Следующие утверждения эквивалентны:

1) $\overset{*}{\mathcal{D}}(X,Y)-\mathcal{D}^*(Y,X)=\mathcal{D}(X,Y)-\mathcal{D}(Y,X)$;

2) $(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y)-(\overline{\nabla}_Y\varphi)(X)=(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_X\varphi)(X)$;

3) $(\bar d\varphi)(X,Y)-\varphi\overline{S}(X,Y)=(d\varphi)(X,Y)-\varphi S(X,Y)$;

4) $\overset{*}{\overline{S}}-\overset{*}{S}=\overline{S}-S$,

где S, S^*, $\overline{S}$, $\overset{*}{\overline{S}}$ кручения связностей ∇, $\overset{*}{\nabla}$, $\overline{\nabla}$, $\overset{*}{\overline{\nabla}}$

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из (2) и соотношений

$$(\nabla_X\varphi)(Y)-(\nabla_Y\varphi)(X)=(d\varphi)(X,Y)-\varphi S(X,Y),$$

$$(\overline{\nabla}_X\varphi)(Y)-(\overline{\nabla}_Y\varphi)(X)=(\bar d\varphi)(X,Y)-\varphi\overline{S}(X,Y).$$

Поле $\varphi\in T^1_1(M_n)$ называется полем Кодацци [4], если $d\varphi=0$.

Из теорем 1,2 вытекают два следствия.

С л е д с т в и е 2. Если алгебра $\mathcal{U}(M_n,\mathcal{D}^*)$ коммутативна, то следующие утверждения эквивалентны: 1) φ -поле Кодацци в связности ∇, 2) φ -поле Кодацци в связности $\overline{\nabla}$.

С л е д с т в и е 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) φ - поле Кодацци в связности ∇ (в связности $\overline{\nabla}$), 2) $S^*=0$ ($\overset{*}{\overline{S}}=0$).

О п р е д е л е н и е 2. Будем говорить, что пара связностей $\{\overset{1}{\nabla},\overset{2}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\overset{1}{\overline{\nabla}},\overset{2}{\overline{\nabla}}\}$, если существует поле $\mathcal{D}\in T^1_2(M_n)$ такое, что $\overset{1}{\overline{\nabla}}-\overset{1}{\nabla}=\overset{2}{\overline{\nabla}}-\overset{2}{\nabla}$.

Т е о р е м а 3. Следующие утверждения эквивалентны: 1) пара $\{\nabla,\overset{*}{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\overline{\nabla},\overset{*}{\overline{\nabla}}\}$; 2) пара $\{\nabla,\overline{\nabla}\}$ деформируется в пару $\{\overset{*}{\nabla},\overset{*}{\overline{\nabla}}\}$, 3) $\mathcal{D}^*=\mathcal{D}$, 4) $\overline{A}=A$.

Библиографический список

1. Waisman I. Sur quelques formules du calcul du Ricci global // Comment. math. helv. 1966. v. 41. N2. p.73-87.

2. Nicolescu L., Martin M. Sur l'algebre associel a un champ tensorial du type (1.2) // Acta Math. Acad. Sci Hungarical. 1978. v.31. p.27-35.