следующие геометрические характеристики.

Т е о р е м а 1. Биконформное отображение будет отображением типа f_1

а) тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [1];

б) тогда и только тогда, когда для любой кривой γ^* графика V^*_n, принадлежащей распределению Δ^*_p, соприкасающаяся плоскость $\Pi_2(x,\gamma^*)$ ортогональна инвариантной плоскости $(x, \vec{\varepsilon}_{n+i}, \dots, \vec{\varepsilon}_{n+p})$.

Т е о р е м а 2. Биконформное отображение будет отображением типа f_2 тогда и только тогда, когда распределение Δ_p (а значит, и распределения $\bar{\Delta}_p$ и Δ^*_p) вполне интегрируемо, и $\alpha = const$ вдоль интегральных кривых распределения Δ_p [1].

При этом на одномерных нормалях $(x, \vec{\varepsilon}_u)$ к поверхности V^*_p абсциссы псевдофокусов F^s_u совпадают с абсциссами соответствующих псевдофокусов на нормалях $(x_1, \vec{e}_u)$ к поверхности V_p (на нормалях $(x_2, \vec{e}_{n+u})$ к поверхности $\bar{V}_p$), где V_p, $\bar{V}_p$ и V^*_p -интегральные многообразия распределений $\Delta_p, \bar{\Delta}_p$ и Δ^*_p соответственно.

Т е о р е м а 3. Биконформное отображение будет отображением типа f_3 тогда и только тогда, когда линии ткани $\Sigma^*_p \subset \Delta^*_p$ сопряжены относительно конусов $\Phi^{n+u} = 0$, и псевдофокусы F^s_{n+u} на прямых $(x, \vec{\varepsilon}_{n+u})$ являются несобственными точками.

В этом случае имеем:

$$a^u_{ts} = \frac{(1+\alpha)\, b^{n+t}_{us}}{\beta-\alpha}, \qquad a^u_{ts} = \bar{a}^u_{ts}.$$

С л е д с т в и е 1. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) сопряжена тогда и только тогда, когда распределение Δ_p вполне интегрируемо.

С л е д с т в и е 2. Ткань Σ_p на распределении Δ_p (ткань $\bar{\Sigma}_p$ на распределении $\bar{\Delta}_p$) состоит из асимптотических линий тогда и только тогда, когда $\alpha = const$ вдоль распределения Δ_{n-p}.

Аналогично можно сформулировать признаки для биконформных отображений типа f'_1, f'_2, f'_3, воспользовавшись формулами (4)-(6), (9)-(11) для соответствующего набора индексов.

Библиографический список

1. Г л а н ц Б. Распределения и биконформные отображения римановых пространств: Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. М., 1988.

2. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств //Вопросы дифференциальной геометрии: Уч. зап./МГПИ им. В.И. Ленина. М., 1970. Т.1 №374. С.41-51.

УДК 514.75

К ТЕОРИИ ТОЧЕЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Б.А. А н д р е е в

(Калининградский ун-т)

Изучается дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$ проективных пространств произвольных размерностей. Доказано, что фундаментальным объектом 2-го порядка отображения f для каждой точки $P \in P_m$ определяется отображение h, названное характеристическим отображением в точке P, которое определено на пространстве гиперплоскостей в P_n, не инцидентных точке $f(P)$, и принимает значение в пространстве линейных семейств гиперквадрик пространства P_m. Более подробно изучен случай субмерсии $(m \geqslant n)$. Получен ряд теорем, в которых показано, что характеристическое отображение в точке P определяет конус характеристических прямых в этой точке и характеристические гомографии на них. Исследование отображения f проводится с помощью метода продолжений и охватов и носит локальный характер. Индексы принимают следующие значения: $J,\ldots = \overline{1,m}$; $i,\ldots = \overline{1,n}$; $J',\ldots = \overline{0,m}$; $i',\ldots = \overline{0,n}$.

1. Фундаментальный объект 2-го порядка отображения f.

Пусть P_m и P_n -два проективных пространства, отнесенные соответственно к подвижным реперам $R = \{\bar{R}_{J'}\}$, $\tau = \{\bar{\tau}_{i'}\}$, деривационные формулы которых имеют вид:

$$d\bar{R}_{J'} = \Omega^{K'}_{J'} \bar{R}_{K'}; \qquad d\tau_{i'} = \omega^{j'}_{i'} \tau_{j'}, \tag{1}$$

причем выполняется:

$$\mathcal{D}\Omega^{K'}_{J'} = \Omega^{L'}_{J'} \wedge \Omega^{K'}_{L'}; \qquad \mathcal{D}\omega^{j'}_{i'} = \omega^{k'}_{i'} \wedge \omega^{j'}_{k'}. \tag{2}$$

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: P_m \to P_n$, имеющее максимальный возможный ранг в каждой точке области определения: $rang\, f = min\,(m,n)$. Поместим вершину R_0 репера R в произвольную точку P области определения отображения f, а вершину τ_0 репера τ в соответствующую ей точку $p = f(P) \in P_n$. Указанные реперы будем называть реперами нулевого порядка отображения f. В этих реперах структурными формами пространств

P_m и P_n являются формы Пфаффа Ω^j_0, ω^i_0. В реперах нулевого порядка система дифференциальных уравнений отображения f запишется в виде:

$$\omega^i_0 = \Lambda^i_j \Omega^j_0. \tag{3}$$

Двукратное продолжение системы (3) приводит к уравнениям

$$\nabla \Lambda^i_j = \Lambda^i_{jk}\Omega^k_0, \tag{4}$$

$$\nabla\Lambda^i_{jk} + \Lambda^i_{(j}\Omega^0_{k)} - \Lambda^i_{(j}\Lambda^t_{k)}\omega^0_t = \Lambda^i_{jkl}\Omega^l_0. \tag{5}$$

Здесь ∇ -оператор, определенный в [3,с.29], а скобки означают циклирование.

Формулы (3)-(5) показывают, что системы величин $\Gamma_1 = \{\Lambda^i_j\}$ и $\Gamma_2 = \{\Lambda^i_j, \Lambda^i_{jk}\}$ являются фундаментальными объектами соответственно 1-го и 2-го порядков отображения f. Из определения отображения f получаем для матрицы $[\Lambda^i_j]$:

$$\operatorname{rang}[\Lambda^i_j] = \min(m,n). \tag{6}$$

2. Отображение h.

Пусть $\bar P_n$ -пространство, двойственное к P_n, и $\{p\}$ -связка гиперплоскостей в P_n, инцидентных точке p. Обозначим $A_n = \bar P_n \setminus \{p\}$. Как однородное пространство A_n изоморфно n-мерному аффинному пространству. Произвольный элемент $\pi \in A_n$ определяется уравнением

$$A_i x^i + x^0 = 0, \tag{7}$$

где x^0, x^i - однородные координаты точек в P_n. Обозначим символами $\pi^{j'}_{i'}, \Pi^{k'}_{j'}$ значения форм $\omega^{j'}_{i'}, \Omega^{k'}_{j'}$ при фиксированных первичных параметрах, а символом $\overset{\circ}{\nabla}$ -оператор, соответствующий при этом оператору ∇. Тогда закон изменения величин A_i запишется в виде

$$\overset{\circ}{\nabla} A_i = \pi_i. \tag{8}$$

Введем систему величин

$$\bar\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{jk} - A_t\Lambda^t_{(j}\Lambda^i_{k)}. \tag{9}$$

Имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla}\bar\Lambda^i_{jk} = -\Lambda^i_{(j}\Pi^0_{k)}. \tag{10}$$

Объект $\{\Lambda^i_j, \bar\Lambda^i_{jk}\}$ определяет в P_m для каждого $\pi \in A_n$ инвариантное алгебраическое многообразие J_π:

$$\bar\Lambda^i_{jk}X^jX^k - 2\Lambda^i_jX^jX^0 = 0. \tag{11}$$

Здесь X^0, X^j -однородные координаты точек в P_m. Обозначим

$$F^i = \bar\Lambda^i_{jk}X^jX^k - 2\Lambda^i_jX^jX^0. \tag{12}$$

Уравнение

$$a_iF^i = 0 \tag{13}$$

определяет в P_m инвариантное линейное семейство гиперквадрик, инцидентных точке P. Размерность этого многообразия гиперквадрик в случае $m \geqslant n$ при выполнении условия (6) равна n. Обозначим символом $E(L_k(Q))$ пространство всех k-мерных линейных семейств $L_k(Q)$ гиперквадрик $Q \subset P_m$, таких, что $P \in Q$. Имеем $0 < k \le N = C^2_{m+2} - 2$. $E(L_k(Q))$ является пространством представления проективной группы, действующей в P_m. Получаем

П р е д л о ж е н и е 1. Иммерсия $f: P_m \to P_n$ порождает для каждой точки $P \in P_m$ отображение $h: \pi \in A_n \mapsto h(\pi) \in E(L_n(Q))$, где π и $h(\pi)$ определяются формулами (7) и (13).

Будем называть отображение h характеристическим отображением отображения f в точке P.

Пусть S -отображение, которое семейству (13) ставит в соответствие многообразие (11), являющееся пересечением всех гиперквадрик семейства (13).

Рассмотрим отображение $h^* = S \circ h$. Многообразие $h^*(\pi) = J_\pi \subset P_m$ содержит точку P и в общем случае является алгебраическим многообразием размерности $m-n$ и порядка 2^n. Частным случаем многообразия J_π является введенная автором в [4],[5] индикатриса J отображения пространства P_m в расширенное аффинное пространство, в котором π является несобственной гиперплоскостью. Действительно, помещая на π вершины z_i репера, получаем из (7): $A_i = 0$. Система (11) тогда принимает вид (1) [5] и, следовательно, определяет индикатрису J.

При $m < n$ отображение $h: A_n \to E(L_k(Q))$, определяемое формулами (7),(13), также будем называть характеристическим. В общем случае имеем: $k = \dim h(\pi) = \min(n, N)$. Таким образом, при $m < n$ отображение h нетривиально, если n меньше N. В специальных случаях значение k может понижаться, однако из (6),(9),(13) вытекает, что при этом всегда выполняется: $k \geqslant m$. Например, если $f(P)$ -планарная точка многообразия

$\mathfrak{J}m\, f = f(P_m) \subset P_n$,то получаем: $k = m$.Вообще можно показать,что при $k < n$ размерность асимптотического конуса многообразия $\mathfrak{J}m f$ в точке $f(P)$ больше,чем в общем случае. Отображение h^* при $m<n$ нетривиально (т.е. $h^*(\pi)$ не сводится к множеству,состоящему из точки P) только в специальных случаях.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением субмерсии.

3.Характеристический конус.

Характеристическим конусом χ будем называть множество прямых связки $\{P\}$,имеющих характеристические направления [1] в точке P . В соответствии с [1] будем различать нулевые и ненулевые характеристические прямые.Обозначим символом $[\mathfrak{J}_\pi]$ множество прямых связки $\{P\}$,которые а)пересекают многообразие $\mathfrak{J}_\pi$ в двух точках или б) касаются его в точке P .

Т е о р е м а I. Множество $[\mathfrak{J}_\pi]$ для любого $\pi \in A_n$ является характеристическим конусом: $\chi = [\mathfrak{J}_\pi]$,причем ненулевые характеристические прямые пересекают многообразие $\mathfrak{J}_\pi$,а нулевые касаются его в точке P .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Зафиксируем произвольный элемент π пространства A_n .Рассмотрим расширенное аффинное пространство P_n ,в котором π является несобственной гиперплоскостью. $\mathfrak{J}_\pi$ тогда становится индикатрисой отображения f , и доказываемое утверждение вытекает из теоремы I работы [4].

Т е о р е м а 2. Если h -характеристическое отображение в точке P и $h^* = s \circ h$,то выполняется : $\bigcup\limits_{\pi \in A_n} h^*(\pi) = \overline{\chi}$, где $\overline{\chi}$ -множество всех точек ненулевых характеристических прямых.

Теорема 2 является следствием доказываемой ниже теоремы 3.

Теоремы I и 2 показывают,что отображение h определяет множество характеристических прямых отображения f .

4. $K(P_J)$ -главные прямые.

Легко показать,что если исключить из рассмотрения нулевые характеристические прямые,то понятия,связанные с $K(P_J)$-главными прямыми отображения $P_m \to P_n$ ($m=n$), и соответствующие формулы без изменений переносятся на случай $m > n$. Пусть Λ - прямая связки $\{P\}$,а $K(\Lambda)$ -ее образ при коллинеациях,касательных к отображению f в точке P .Если Λ -ненулевая характеристическая прямая,то каждой из коллинеаций,для которых

эта прямая является главной,определяется одно и то же проективное соответствие $\Lambda \to K(\Lambda)$,имеющее вид (I.I9) в [2].Будем называть это соответствие характеристической гомографией на Λ .

Из (II) вытекает,что пересечение $\Lambda \cap h^*(\pi)$ состоит из пары точек,одна из которых совпадает с точкой P .Таким образом, отображение h для каждой ненулевой характеристической прямой Λ определяет точечное отображение $h^*_\Lambda : K(\Lambda) \to \Lambda$,которое точке пересечения прямой $K(\Lambda)$ с гиперплоскостью π ставит в соответствие отличную от P точку из $\Lambda \cap h^*(\pi)$,а точке $f(P)$ - точку P .

Т е о р е м а 3. Характеристическая гомография на Λ является отображением,обратным к отображению h^*_Λ, и,таким образом,характеристическое отображение h определяет характеристические гомографии на ненулевых характеристических прямых.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть a - произвольная точка на $K(\Lambda)$,отличная от $f(P)$.Зафиксируем произвольную гиперплоскость π ,пересекающую прямую $K(\Lambda)$ в точке a .Фиксация π задает на P_n структуру расширенного аффинного пространства,а многообразие $\mathfrak{J}_\pi$ является индикатрисой отображения f в это пространство.Из предложения I работы [4] теперь вытекает,что $A = h^*_\Lambda(a)$ является главной точкой на Λ ;но в соответствии с определением I [4] точка A является прообразом точки a при характеристической гомографии на Λ .Так как a -любая,отличная от $f(P)$ точка на $K(\Lambda)$,а характеристическая гомография на Λ является биекцией,то теорема доказана.

Заметим,что теоремы 2 и 3 дают полную геометрическую характеристику отображения h^* , таким образом,и характеристику отображения h .

Библиографический список

1.Р ы ж к о в В.В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n //Тр.геометр. семинара/ВИНИТИ.М., I97I.Т.3.С.235-242.

2.Р ы ж к о в В.В. Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами// Геометрия,I963.Итоги науки/ ВИНИТИ.М.,I965.С.65-I07.

3.А н д р е е в Б.А. О дифференциальной геометрии соответствий между пространством пары (p,q) и точечным пространством//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Сб.науч.тр./ Калинингр.ун-т.Калининград,I97I.Вып.2.С.28-37.

4. А н д р е е в Б.А. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n\ (m>n)$ //Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1979. Вып. 10. С. 5-9.

5. А н д р е е в Б.А. К геометрии дифференцируемого отображения $f: P_m \to \hat{P}_n\ (m>n)$ // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Межвуз.темат.сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 5-9.

УДК 514.76

О ДВУХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ ОТОБРАЖЕНИЯ

В.Т. Б а з ы л е в

(МГПИ им.В.И.Ленина)

В статье дано определение характеристических направлений отображения пространств аффинной связности без кручения. Доказано, что в случае отображения областей аффинных пространств это определение совпадает с классическим определением, идущим от О.Борувки [1].

1. Пусть $(\mathfrak{X}_n,\nabla)$ и $(\bar{\mathfrak{X}}_n,\bar\nabla)$ -пространства аффинной связности без кручения (возможен случай, когда базы $\mathfrak{X}_n$ и $\bar{\mathfrak{X}}_n$ совпадают) и $f: \mathfrak{X}_n \to \bar{\mathfrak{X}}_n$ -диффеоморфизм (вообще говоря, рассмотрение локальное, так что речь может идти о некоторой области $\Omega \subset \mathfrak{X}_n$ и диффеоморфной ей области $\bar\Omega \subset \bar{\mathfrak{X}}_n$). Связность $\nabla\ (\bar\nabla)$ определяется 1-формами $\omega^i, \omega^i_j\ (i,j,k,l=\overline{1,n})\ (\theta^i, \theta^i_j)$, удовлетворяющими известным уравнениям структуры:

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j\,,\quad \mathcal{D}\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \frac{1}{2} R^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l, \tag{1}$$

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j\,,\quad \mathcal{D}\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \frac{1}{2} \bar R^i_{jkl}\, \theta^k \wedge \theta^l. \tag{2}$$

Пусть $f(x)=\bar x$. К точкам x и $\bar x$ присоединим подвижные реперы $R^x=(x, X_i)$ и $R^{\bar x}=(\bar x, X'_i)$. Относительно такой пары реперов отображение f будет задаваться системой уравнений вида $\theta^i=\mu^i_j\,\omega^j$. Применение этих уравнений в изучении свойств отображения f приводит к значительным аналитическим осложнениям. Мы будем брать реперы R^x и $R^{\bar x}$ согласованными в индуцированном отображении $f_*: R^{\bar x}=f_{*x}(R^x)$. Имеем: $dx=\omega^i X_i$, $d\bar x=\theta^j X'_j$, $d\bar x=f_{*x}(dx)$. Учитывая, что отображение f_{*x} действует линейно на векторы из векторного пространства $T_x(\mathfrak{X}_n)$, мы теперь приходим к системе уравнений:

$$\theta^i=\omega^i. \tag{3}$$

Это есть система дифференциальных уравнений отображения f относительно согласованной пары реперов R^x и $R^{\bar x}$.

2. Продолжая систему уравнений (3), находим

$$\theta^i_j-\omega^i_j=h^i_{jk}\,\omega^k, \tag{4}$$

где h^i_{jk} - тензор, симметричный по нижним индексам (тензор аффинной деформации [2]).

Пусть $T(\mathfrak{X}_n)$-касательное расслоение на многообразии $\mathfrak{X}_n$. Поле тензора h^i_{jk} позволяет построить отображение

$$h: T(\mathfrak{X}_n)\times T(\mathfrak{X}_n) \to T(\mathfrak{X}_n)$$

по закону: если $\xi=\xi^i X_i$, $\eta=\eta^j X_j$, то

$$h(\xi,\eta)=h^i_{jk}\,\xi^j\eta^k X_i. \tag{5}$$

Отсюда следует, что $h(a\xi,b\eta)=ab\,h(\xi,\eta)$, и, значит, отображение h каждую пару 1-распределений $\Delta_1(\xi), \Delta'_1(\eta)$, определенных в расслоении $T(\mathfrak{X}_n)$, переводит в некоторое 1-распределение, определенное формулой (5). Из формулы (5) следует, что 1-распределение $\Delta_1=\Delta_1(\xi)$, удовлетворяющее условию

$$h(\Delta_1,\Delta_1)=\Delta_1, \tag{6}$$

не зависит от выбора репера R^x.

1-распределение Δ_1, удовлетворяющее условию (6), мы назовем характеристическим 1-распределением отображения f. Следовательно, характеристическое 1-распределение определяется векторным полем ξ, которое удовлетворяет системе уравнений:

$$h^i_{jk}\,\xi^j\xi^k=\lambda\xi^i. \tag{*}$$

В этом случае направление (x,ξ) называется характеристическим направлением в точке x.

Легко подсчитать, что в общем случае отображения существуют $m=2^n-1$ характеристических направлений. Их интегральные кривые, называемые характеристическими линиями, образуют характеристическую m-ткань линий. На многообразии $\bar{\mathfrak{X}}_n$ ей соответствует m-ткань линий, которая является характеристической для отобра-