УДК 514.76

Ю. И. Шевченко[1]
[1] *Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия*
ESkrydlova@kantiana.ru

Иерархия пространств проективной связности

Рассмотрено расслоение проективных реперов над гладким многообразием — главное расслоение, типовым слоем которого является проективная группа. Задание фундаментально-групповой связности в этом расслоении превращает его в пространство общей проективной связности. Получены дифференциальные уравнения компонент тензора кривизны, их ковариантные производные и аналоги тождеств Бианки.

При совпадении базисных и слоевых индексов выделен частный случай, названный пространством предкартановой проективной связности. С помощью приклеивания слоев к базе пространства предкартановой связности получено пространство проективной связности Картана. В этом случае тензор кривизны преобразуется в тензор кривизны-кручения, который содержит тензор аффинной кривизны-кручения с подтензором кручения.

Построена иерархия рассмотренных пространств, в начале которой — расслоение проективных реперов, в середине — пространства проективной связности (общее, предкартаново и картаново), в конце — проективное пространство.

Ключевые слова: расслоение проективных реперов, проективная связность, аналоги тождеств Бианки, предкартанова проективная связность, приклеивание, проективная связность Картана, тензор кривизны-кручения, тензор аффинной кривизны-кручения.

Поступила в редакцию 30.05.2018 г.

1. Связность в расслоении проективных реперов

Рассмотрим расслоение проективных реперов $G_{n(n+2)}(V_m)$ над m-мерным гладким многообразием V_m, типовым слоем которого является проективная группа $G_{n(n+2)}$. Структурные уравнения расслоения $G_{n(n+2)}(V_m)$ имеют вид [1; 2]

$$\begin{gathered} d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j \quad (i, \ldots = \overline{1,m}), \\ d\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J + \theta^j \wedge \vartheta^I_j \quad (I, \ldots = \overline{1,n}), \\ d\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \delta^I_J \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I + \theta^k \wedge \omega^I_{Jk}, \\ d\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J + \theta^j \wedge \omega_{Ij}. \end{gathered} \tag{1}$$

Продолжим эти уравнения, то есть замкнем и разрешим по лемме Лаптева [3]:

$$\begin{gathered} d\theta^i_j = \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \theta^k \wedge \theta^i_{jk}, \\ d\vartheta^I_j = \vartheta^J_j \wedge \omega^I_J - \vartheta^I_k \wedge \theta^k_j + \omega^J \wedge \omega^I_{Jj} + \theta^k \wedge \vartheta^I_{jk}, \\ d\omega^I_{Jk} = \omega^K_{Jk} \wedge \omega^I_K - \omega^I_{Kk} \wedge \omega^K_J - \omega^I_{Jl} \wedge \theta^l_k + \omega_J \wedge \omega^I_k + \\ + \omega_{Jk} \wedge \omega^I + \delta^I_J(\omega_K \wedge \vartheta^K_k + \omega_{Kk} \wedge \omega^K) + \theta^l \wedge \omega^I_{Jkl}, \\ d\omega_{Ij} = \omega^J_{Ij} \wedge \omega_J - \omega_{Jj} \wedge \omega^J_I - \omega_{Ik} \wedge \theta^k_j + \theta^k \wedge \omega_{Ijk}, \end{gathered} \tag{2}$$

причем (см. [4])

$$\theta^i_{[jk]} \cong 0, \vartheta^I_{[jk]} \cong 0, \omega^I_{J[kl]} \cong 0, \omega_{I[jk]} \cong 0\,, \tag{3}$$

где символ $\cong$ обозначает дифференциальное сравнение по модулю базисных форм θ^i, а квадратные скобки дают альтернирование.

В главном расслоении $G_{n(n+2)}(V_m)$ зададим фундаментально-групповую связность способом Лаптева — Лумисте [5] с помощью форм

$$\tilde{\omega}^I = \omega^I - L^I_j\theta^j, \tilde{\omega}^I_J = \omega^I_J - \Gamma^I_{Jk}\theta^k, \tilde{\omega}_I = \omega_I - \Gamma_{Ij}\theta^j. \qquad (4)$$

Используя структурные уравнения (1), найдем внешние дифференциалы форм (4):

$$d\tilde{\omega}^I = \tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^I_J + \theta^j \wedge (\Delta L^I_j - \Gamma^I_{Jj}\omega^J + \vartheta^I_j) - L^J_j\theta^j \wedge \Gamma^I_{Jk}\theta^k,$$

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^I_J = \tilde{\omega}^K_J \wedge \tilde{\omega}^I_K + \delta^I_J\tilde{\omega}_K \wedge \tilde{\omega}^K + \tilde{\omega}_J \wedge \tilde{\omega}^I + \theta^k \wedge [\Delta\Gamma^I_{Jk} + \\ + \delta^I_J(\Gamma_{Kk}\omega^K - L^K_k\omega_K) + \Gamma_{Jk}\omega^I - L^I_k\omega_J + \omega^I_{Jk}] - \\ - (\Gamma^K_{Jk}\Gamma^I_{Kl} + \delta^I_J\Gamma_{Kk}L^K_l + \Gamma_{Jk}L^I_l)\theta^k \wedge \theta^l, \end{aligned} \qquad (5)$$

$$d\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}^J_I \wedge \tilde{\omega}_J + \theta^j \wedge (\Delta\Gamma_{Ij} + \Gamma^K_{Ij}\omega_K + \omega_{Ij}) - \Gamma^J_{Ij}\theta^j \wedge \Gamma_{Jk}\theta^k,$$

где тензорный дифференциальный оператор Δ действует так:

$$\Delta\Gamma^I_{Jk} = d\Gamma^I_{Jk} + \Gamma^K_{Jk}\omega^I_K - \Gamma^I_{Kk}\omega^K_J - \Gamma^I_{Jl}\theta^l_k.$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [6] зададим поле объекта проективной связности $\Gamma = \{L^I_j, \Gamma^I_{Jk}, \Gamma_{Ij}\}$:

$$\begin{aligned} \Delta L^I_j - \Gamma^I_{Jj}\omega^J + \vartheta^I_j = L^I_{jk}\theta^k, \\ \Delta\Gamma^I_{Jk} + \delta^I_J(\Gamma_{Kk}\omega^K - L^K_k\omega_K) + \Gamma_{Jk}\omega^I - L^I_k\omega_J + \omega^I_{Jk} = \Gamma^I_{Jkl}\theta^l, \\ \Delta\Gamma_{Ij} + \Gamma^K_{Ij}\omega_K + \omega_{Ij} = \Gamma_{Ijk}\theta^k. \end{aligned} \qquad (6)$$

Подставим эти дифференциальные уравнения в структурные уравнения (5):

$$\begin{aligned} d\tilde{\omega}^I = \tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^I_J + S^I_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \\ d\tilde{\omega}^I_J = \tilde{\omega}^K_J \wedge \tilde{\omega}^I_K + \delta^I_J\tilde{\omega}_K \wedge \tilde{\omega}^K + \tilde{\omega}_J \wedge \tilde{\omega}^I + R^I_{Jkl}\theta^k \wedge \theta^l, \\ d\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}^J_I \wedge \tilde{\omega}_J + R_{Ijk}\theta^j \wedge \theta^k, \end{aligned} \qquad (7)$$

причем компоненты объекта кривизны $R = \{S^I_{jk}, R^I_{Jkl}, R_{Ijk}\}$ выражаются следующим образом:

$$S^I_{jk} = L^I_{[jk]} - L^J_{[j}\Gamma^I_{Jk]},$$

$$R^I_{Jkl} = \Gamma^I_{J[kl]} - \Gamma^K_{J[k}\Gamma^I_{Kl]} - \delta^I_J \Gamma_{K[k}L^K_{l]} - \Gamma_{J[k}L^I_{l]}, \tag{8}$$

$$R_{Ijk} = \Gamma_{I[jk]} - \Gamma^J_{I[j}\Gamma_{Jk]}.$$

Следовательно, компоненты объекта R антисимметричны по базисным индексам:

$$S^I_{(jk)} = 0, \quad R^I_{J(kl)} = 0, \quad R_{I(jk)} = 0, \tag{9}$$

где круглые скобки обозначают симметрирование.

Утверждение 1. *Проективная связность в расслоении проективных реперов $G_{n(n+2)}(V_m)$ задается с помощью форм (4), которые определяются объектом проективной связности $\Gamma = \{L^I_j, \Gamma^I_{Jk}, \Gamma_{Ij}\}$, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (6). Формы проективной связности (4) подчиняются структурным уравнениям (7), которые вместе с уравнениями (1_1) составляют систему структурных уравнений пространства проективной связности $G_{n(n+2),m}$. В уравнения (7) входят компоненты объекта проективной кривизны $R = \{S^I_{jk}, R^I_{Jkl}, R_{Ijk}\}$, выражающиеся по формулам (8) через компоненты объекта связности Γ и их пфаффовы производные.*

2. Тензор проективной кривизны

Продолжим дифференциальные уравнения (6) и запишем результат в виде сравнений:

$$\Delta L^I_{jk} - \Gamma^I_{Jjk}\omega^J - \Gamma^I_{Jj}\vartheta^J_k + L^J_j\omega^I_{Jk} - L^I_l\theta^l_{jk} + \vartheta^I_{jk} \cong 0,$$

$$\Delta\Gamma^I_{Jkl} + \delta^I_J(\Gamma_{Kkl}\omega^K + \Gamma_{Kk}\vartheta^K_l - L^K_{kl}\omega_K - L^K_k\omega_{Kl}) + \Gamma_{Jkl}\omega^I + \Gamma_{Jk}\vartheta^I_l -$$
$$- L^I_{kl}\omega_J - L^I_k\omega_{Jl} + \Gamma^K_{Jk}\omega^I_{Kl} - \Gamma^I_{Kk}\omega^K_{Jl} - \Gamma^I_{Jp}\theta^p_{kl} + \omega^I_{Jkl} \cong 0,$$
$$\Delta\Gamma_{Ijk} + \Gamma^J_{Ijk}\omega_J + \Gamma^J_{Ij}\omega_{Jk} - \Gamma_{Jj}\omega^J_{Ik} - \Gamma_{Il}\theta^l_{jk} + \omega_{Ijk} \cong 0 .$$

Проальтернируем эти сравнения по базисным индексам и учтем сравнения (3):

$$\Delta L^I_{[jk]} - \Gamma^I_{J[jk]}\omega^J - \Gamma^I_{J[j}\vartheta^J_{k]} + L^J_{[j}\omega^I_{Jk]} \cong 0 ,$$
$$\Delta\Gamma^I_{J[kl]} + \delta^I_J(\Gamma_{K[kl]}\omega^K + \Gamma_{K[k}\vartheta^K_{l]} - L^K_{[kl]}\omega_K - L^K_{[k}\omega_{Kl]}) + \Gamma_{J[kl]}\omega^I +$$
$$+ \Gamma_{J[k}\vartheta^I_{l]} - L^I_{[kl]}\omega_J - L^I_{[k}\omega_{Jl]} + \Gamma^K_{J[k}\omega^I_{Kl]} - \Gamma^I_{K[k}\omega^K_{Jl]} \cong 0, \qquad (10)$$
$$\Delta\Gamma_{I[jk]} + \Gamma^J_{I[jk]}\omega_J + \Gamma^J_{I[j}\omega_{Jk]} - \Gamma_{J[j}\omega^J_{Ik]} \cong 0 .$$

Запишем дифференциальные сравнения для произведений, входящих в формулы (8):

$$\Delta L^J_{[j}\Gamma^I_{Jk]} + L^J_{[j}\Omega^I_{Jk]} + \Gamma^I_{J[k}\Omega^J_{j]} + L^I_{[j}\Gamma_{Jk]}\omega^J \cong 0 ,$$
$$\Delta(\Gamma^K_{J[k}\Gamma^I_{Kl]} + \delta^I_J\Gamma_{K[k}L^K_{l]} + \Gamma_{J[k}L^I_{l]}) + \Gamma^I_{K[l}\Theta^K_{Jk]} + \Gamma^K_{J[k}\Omega^I_{Kl]} +$$
$$+ \Gamma_{J[k}\vartheta^I_{l]} + L^I_{[l}\omega_{Jk]} + \delta^I_J(L^K_{[l}\Omega_{Kk]} + \Gamma_{K[k}\Omega^K_{l]}) \cong 0, \qquad (11)$$
$$\Delta\Gamma^J_{I[j}\Gamma_{Jk]} + \Gamma^J_{I[j}\Omega_{Jk]} + \Gamma_{J[k}\Theta^J_{Ij]} - L^J_{[j}\Gamma_{Ik]}\omega_J \cong 0 ,$$

где

$$\Omega^I_{Jk} = \omega^I_{Jk} + \Gamma_{Jk}\omega^I, \quad \Omega^I_j = \vartheta^I_j - \Gamma^I_{Jj}\omega^J,$$
$$\Theta^I_{Jk} = \omega^I_{Jk} - L^I_k\omega_J, \quad \Omega_{Ij} = \omega_{Ij} + \Gamma^K_{Ij}\omega_K.$$

Вычтем сравнения (11) из соответствующих сравнений (10), используем формулы (8) и запишем результат в виде дифференциальных уравнений:

$$\Delta S^I_{jk} - R^I_{Jjk}\omega^J = S^I_{jkl}\theta^l ,$$
$$\Delta R^I_{Jkl} + \delta^I_J(R_{Kkl}\omega^K - S^K_{kl}\omega_K) + R_{Jkl}\omega^I - S^I_{kl}\omega_J = R^I_{Jklp}\theta^p , \qquad (12)$$
$$\Delta R_{Ijk} + R^J_{Ijk}\omega_J = R_{Ijkl}\theta^l .$$

Из этих уравнений с учетом условий антисимметрии (9) следует антисимметрия пфаффовых производных компонент объекта R по парам базисных индексов:

$$S^I_{(jk)l} = 0, \quad R^I_{J(kl)p} = 0, \quad R_{I(jk)l} = 0\,. \tag{13}$$

Утверждение 2. *Объект кривизны проективной связности* $R = \{S^I_{jk}, R^I_{Jkl}, R_{Ijk}\}$ *является тензором, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным уравнениям (12), причем тензор* R *не имеет подтензоров.*

При $R = 0$ уравнения (7) упрощаются:

$$d\tilde{\omega}^I = \tilde{\omega}^J \wedge \tilde{\omega}^I_J\,,$$

$$d\tilde{\omega}^I_J = \tilde{\omega}^K_J \wedge \tilde{\omega}^I_K + \delta^I_J \tilde{\omega}_K \wedge \tilde{\omega}^K + \tilde{\omega}_J \wedge \tilde{\omega}^I\,, \tag{14}$$

$$d\tilde{\omega}_I = \tilde{\omega}^J_I \wedge \tilde{\omega}_J\,.$$

Это структурные уравнения проективной группы $G_{n(n+2)}$.

Утверждение 3. *Если тензор проективной кривизны* R *обращается в нуль, пространство проективной связности* $G_{n(n+2),m}$ *вырождается в прямое произведение* $G_{n(n+2)} \times V_m$ *со структурными уравнениями (*1_1*,14).*

3. Аналоги тождеств Бианки

Для нахождения ковариантных производных компонент тензора R относительно проективной связности внесем формы связности (4) в дифференциальные уравнения (12):

$$\tilde{\Delta} S^I_{jk} - R^I_{Jjk}\tilde{\omega}^J = \tilde{S}^I_{jkl}\theta^l\,,$$

$$\tilde{\Delta} R^I_{Jkl} + \delta^I_J (R_{Kkl}\tilde{\omega}^K - S^K_{kl}\tilde{\omega}_K) + R_{Jkl}\tilde{\omega}^I - S^I_{kl}\tilde{\omega}_J = \tilde{R}^I_{Jklp}\theta^p\,, \tag{15}$$

$$\tilde{\Delta} R_{Ijk} + R^J_{Ijk}\tilde{\omega}_J = \tilde{R}_{Ijkl}\theta^l\,,$$

где ковариантные производные выражаются через пфаффовы производные следующим образом:

$$\widetilde{S}^I_{jkl} = S^I_{jkl} - S^J_{jk}\Gamma^I_{Jl} + R^I_{Jjk}L^J_l\,,$$

$$\begin{gathered}\widetilde{R}^I_{Jklp} = R^I_{Jklp} - R^K_{Jkl}\Gamma^I_{Kp} + R^I_{Kkl}\Gamma^K_{Jp} - \\ -\delta^I_J(R_{Kkl}L^K_p - S^K_{kl}\Gamma_{Kp}) - R_{Jkl}L^I_p + S^I_{kl}\Gamma_{Jp},\end{gathered} \tag{16}$$

$$\widetilde{R}_{Ijkl} = R_{Ijkl} + R_{Jjk}\Gamma^J_{Il} - R^J_{Ijk}\Gamma_{Jl}\,,$$

а дифференциальный оператор $\widetilde{\varDelta}$ действует по закону

$$\widetilde{\varDelta}R^I_{Jkl} = dR^I_{Jkl} + R^K_{Jkl}\widetilde{\omega}^I_K - R^I_{Kkl}\widetilde{\omega}^K_J - R^I_{Jpl}\theta^p_k - R^I_{Jkp}\theta^p_l\,.$$

Замкнем структурные уравнения (7):

$$(\widetilde{\varDelta}S^I_{jk} - R^I_{Jjk}\widetilde{\omega}^J)\wedge\theta^j\wedge\theta^k = 0\,,$$

$$[\widetilde{\varDelta}R^I_{Jkl} + \delta^I_J(R_{Kkl}\widetilde{\omega}^K - S^K_{kl}\widetilde{\omega}_K) + R_{Jkl}\widetilde{\omega}^I - S^I_{kl}\widetilde{\omega}_J]\wedge\theta^k\wedge\theta^l = 0\,,$$

$$(\widetilde{\varDelta}R_{Ijk} + R^J_{Ijk}\widetilde{\omega}_J)\wedge\theta^j\wedge\theta^k = 0\,.$$

Подставим в эти кубичные уравнения дифференциальные уравнения (15):

$$\widetilde{S}^I_{jkl}\theta^j\wedge\theta^k\wedge\theta^l = 0,\ \widetilde{R}^I_{Jklp}\theta^k\wedge\theta^l\wedge\theta^p = 0\,,\ \widetilde{R}_{Ijkl}\theta^j\wedge\theta^k\wedge\theta^l = 0\,,$$

откуда следует

$$\widetilde{S}^I_{[jkl]} = 0,\ \widetilde{R}^I_{J[klp]} = 0,\ \widetilde{R}_{I[jkl]} = 0\,. \tag{17}$$

Условия антисимметрии (9, 13) дают антисимметрию ковариантных производных (16):

$$\widetilde{S}^I_{(jk)l} = 0,\ \widetilde{R}^I_{J(kl)p} = 0,\ \widetilde{R}_{I(jk)l} = 0\,,$$

что позволяет перейти в равенствах (17) от альтернирования к циклированию:

$$\widetilde{S}^I_{\{jkl\}} = 0,\ \widetilde{R}^I_{J\{klp\}} = 0,\ \widetilde{R}_{I\{jkl\}} = 0\,. \tag{18}$$

Утверждение 4. *Ковариантные производные (16) компонент тензора кривизны* $R = \{S^I_{jk}, R^I_{Jkl}, R_{Ijk}\}$ *относительно проективной связности, задаваемой объектом* $\varGamma = \{L^I_j, \varGamma^I_{Jk}, \varGamma_{Ij}\}$, *подчиняются аналогам тождеств Бианки (18).*

Продолжим дифференциальные уравнения (15) с помощью структурных уравнений (1_1, 2_1, 7):

$$\tilde{\varDelta}\tilde{S}^I_{jkl} - \tilde{R}^I_{Jjkl}\tilde{\omega}^J - S^I_{jp}\theta^p_{kl} - S^I_{pk}\theta^p_{jl} \cong 0\,,$$

$$\tilde{\varDelta}\tilde{R}^I_{Jklp} + \delta^I_J(\tilde{R}_{Kklp}\tilde{\omega}^K - \tilde{S}^K_{klp}\tilde{\omega}_K) + \tilde{R}_{Jklp}\tilde{\omega}^I - \\ - \tilde{S}^I_{klp}\tilde{\omega}_J - R^I_{Jql}\theta^q_{kp} - R^I_{Jkq}\theta^q_{lp} \cong 0,$$

$$\tilde{\varDelta}\tilde{R}_{Ijkl} + \tilde{R}^J_{Ijkl}\tilde{\omega}_J - R_{Ijp}\theta^p_{kl} - R_{Ipk}\theta^p_{jl} \cong 0\,.$$

Проциклируем эти дифференциальные сравнения по трем базисным индексам, затем используем условие (3_1) полуголономности [4] базы V_m и антисимметрию (9) компонент тензора кривизны R:

$$\tilde{\varDelta}\tilde{S}^I_{\{jkl\}} - \tilde{R}^I_{J\{jkl\}}\tilde{\omega}^J \cong 0\,,$$

$$\tilde{\varDelta}\tilde{R}^I_{J\{klp\}} + \delta^I_J(\tilde{R}_{K\{klp\}}\tilde{\omega}^K - \tilde{S}^K_{\{klp\}}\tilde{\omega}_K) + \tilde{R}_{J\{klp\}}\tilde{\omega}^I - \tilde{S}^I_{\{klp\}}\tilde{\omega}_J \cong 0,$$

$$\tilde{\varDelta}\tilde{R}_{I\{jkl\}} + \tilde{R}^J_{I\{jkl\}}\tilde{\omega}_J \cong 0\,. \qquad (19)$$

Утверждение 5. *Циклированные ковариантные производные* $\tilde{S}^I_{\{jkl\}}$, $\tilde{R}^I_{J\{klp\}}$, $\tilde{R}_{I\{jkl\}}$ *компонент тензора проективной кривизны* R *образуют тензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (19), поэтому аналоги тождеств Бианки (18) инвариантны в совокупности.*

4. Пространство предкартановой проективной связности

Рассмотрим частный случай $m = n$, когда базисные и слоевые индексы принимают одинаковые значения. Тогда ограничимся одной серией индексов: $i, \ldots = \overline{1, n}$. Структурные уравнения $(1_1, 7)$ для пространства $G_{n(n+2), n}$, которое назовем предкартановым (ср. [7]), запишем в виде

$$
\begin{gathered}
d\theta^i = \theta^j \wedge \theta^i_j, \\
d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j + S^i_{jk}\theta^j \wedge \theta^k, \\
d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \delta^i_j \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + R^i_{jkl}\theta^k \wedge \theta^l, \\
d\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + R_{ijk}\theta^j \wedge \theta^k .
\end{gathered}
\tag{20}
$$

Дифференциальные уравнения (15) для компонент тензора предкартановой кривизны $R = \{S^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ примут вид

$$
\begin{gathered}
\Delta S^{(i)}_{jk} - R^i_{ljk}\omega^l = S^i_{jkl}\theta^l, \\
\Delta R^{(i)}_{(j)kl} + \delta^i_j (R_{pkl}\omega^p - S^p_{kl}\omega_p) + R_{jkl}\omega^i - S^i_{kl}\omega_j = R^i_{jklp}\theta^p, \\
\Delta R_{(i)jk} + R^l_{ijk}\omega_l = R_{ijkl}\theta^l,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

где, например,

$$
\Delta S^{(i)}_{jk} = dS^i_{jk} + S^l_{jk}\omega^I_l - S^i_{lk}\theta^l_j - S^i_{jl}\theta^l_k .
$$

Замечание 1. *В уравнениях (20), (21) опущен знак «~», чтобы не загромождать записи.*

5. Пространство проективной связности Картана

Отождествим структурные уравнения (20_1) и (20_2), то есть положим

$$
\theta^i = \omega^i, \quad \theta^i_j = \omega^i_j + S^i_{jk}\theta^k . \tag{22}
$$

Это означает приклеивание (см., например, [6, с. 110, 118]) к точкам базы V_n проективных пространств $P_n = G_{n(n+2)} / GA^*(n)$, где $GA^*(n)$ — коаффинная (центропроективная) подгруппа проективной группы $G_{n(n+2)}$. В результате приклеивания проективные пространства P_n становятся центропроективными пространствами P_n^0.

Утверждение 6. *При отождествлении (22) пространство предкартановой проективной связности $G_{n(n+2),n}$ превращается в пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$, структурные уравнения которого запишем в виде*

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i + s_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k,$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i + r_{jkl}^i \omega^k \wedge \omega^l, \qquad (23)$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + r_{ijk} \omega^j \wedge \omega^k.$$

Замечание 2. *Обозначение Картана $P_{n,n}$ соответствует проективному расслоению $P_n(V_n)$* [1; 2] *с заданной геометрической связностью, которое имеет структурные уравнения (20$_{1-2}$).*

Замечание 3. *Связность Картана не является (см., например,* [8, с. 167]*) фундаментально-групповой связностью в главном расслоении, так как базисные формы ω^i перемножаются со слоевыми формами ω_j в структурных уравнениях (23$_2$).*

Условия приклеивания (22) упрощают дифференциальные уравнения (21), которые запишем в следующем виде:

$$\Delta s_{jk}^i \cong 0, \Delta r_{ijk} + r_{ijk}^l \omega_l \cong 0, \Delta r_{jkl}^i - \delta_j^i s_{kl}^p \omega_p - s_{kl}^i \omega_j \cong 0, \qquad (24)$$

где, например,

$$\Delta s_{jk}^i = ds_{jk}^i + s_{jk}^l \omega_l^i - s_{lk}^i \omega_j^l - s_{jl}^i \omega_k^l.$$

Замечание 4. *Тензор кривизны* $R = \{S^i_{jk}, R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ *пространства предкартановой проективной связности* $G_{n(n+2),n}$ *после перехода к пространству проективной связности Картана* $P_{n,n}$ *называют тензором кривизны-кручения* $r = \{s^i_{jk}, r^i_{jkl}, r_{ijk}\}$.

Утверждение 7. *Тензор проективной кривизны-кручения* $r = \{s^i_{jk}, r^i_{jkl}, r_{ijk}\}$ *пространства проективной связности Картана* $P_{n,n}$, *компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям (24), содержит [9] тензор аффинной кривизны-кручения* $\bar{r} = \{s^i_{jk}, r^i_{jkl}\}$ *с подтензором кручения* $s = \{ s^i_{jk} \}$.

Если тензор кручения аннулируется ($s = 0$), то пространство $P_{n,n}$ называется пространством проективной связности Картана $P'_{n,n}$ без кручения. Структурные уравнения (23) для пространства $P'_{n,n}$ запишем в виде

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j ,$$

$$d\omega^i_j = \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \omega^k \wedge (r^i_{jkl}\omega^l - \delta^i_j\omega_k - \delta^i_k\omega_j) , \qquad (25)$$

$$d\omega_i = \omega^j_i \wedge \omega_j + \omega^j \wedge r_{ijk}\omega^k .$$

В этом случае центропроективные пространства P^0_n служат касательными пространствами к базе V_n.

Утверждение 8. *База* V_n *пространства проективной связности Картана без кручения* $P'_{n,n}$ *является центропроективным многообразием* [10] *со структурными уравнениями (25), причем связность Картана не порождает в нем центропроективную связность.*

6. Иерархия

Подведем итог. Задание фундаментально-групповой связности в расслоении проективных реперов $G_{n(n+2)}(V_m)$ над гладким многообразием V_m превращает расслоение в пространство проективной связности $G_{n(n+2),m}$. Совпадение базисных и слоевых индексов $(m=n)$ дает частный случай расслоения проективных реперов $G_{n(n+2)}(V_n)$. Задание связности в нем приводит к пространству предкартановой проективной связности $G_{n(n+2),n}$. С помощью приклеивания из пространства $G_{n(n+2),n}$ получается пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ с тензором проективной кривизны-кручения r, содержащим тензор аффинной кривизны-кручения $\bar{r}$ с подтензором кручения s. Если $s=0$, то имеем пространство проективной связности Картана без кручения $P'_{n,n}$. При аннулировании более широкого тензора $\bar{r}=0$ пространство $P'_{n,n}$ превращается в пространство проективной связности Картана без аффинной кривизны-кручения $P''_{n,n}$. Наконец, если тензор проективной кривизны-кручения обратится в нуль ($r=0$), то пространство $P''_{n,n}$ преобразуется в проективную группу $G_{n(n+2)}$, из которой можно построить проективное пространство P_n.

Изобразим иерархию указанных пространств:

$$
\begin{array}{ccl}
 & G_{n(n+2),m} & \\
 & \Uparrow \qquad \downarrow & \\
G_{n(n+2)}(V_m) & & G_{n(n+2),n} \Rightarrow P_{n,n} \to P'_{n,n} \to P''_{n,n} \to G_{n(n+2)} \Rightarrow P_n, \\
 & \downarrow \qquad \Uparrow & \\
 & G_{n(n+2)}(V_n) &
\end{array}
$$

где стрелка показывает переход к особому случаю, а двойная стрелка указывает на дополнительное построение в предыдущем пространстве, позволяющее получить другое пространство. Эта иерархия показывает место пространств проективной связности Картана с точки зрения главных расслоений (ср.: [8, с. 167]).

Список литературы

1. *Лумисте Ю. Г.* Индуцированные связности в погруженных проективных и аффинных расслоениях // Уч. зап. Тартуского ун-та. 1965. № 177. С. 6—42.

2. *Шевченко Ю. И.* Касательные и соприкасающиеся пространства проективного расслоения // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2007. Вып. 38. С. 143—150.

3. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С. 139—189.

4. *Шевченко Ю. И.* Голономные и полуголономные подмногообразия гладких многообразий // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2006. Вып. 37. С. 179—187.

5. *Шевченко Ю. И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2015. Вып. 46. С. 168—177.

6. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—248.

7. *Шевченко Ю. И.* Об обобщениях проективной связности Картана на гладком многообразии // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физ.-мат. науки. Калининград, 2014. Вып. 10. С. 60—68.

8. *Кобаяси Ш.* Группы преобразований в дифференциальной геометрии. М., 1986.

9. *Shevchenko Ju. I.* Tensor of Affine Torsion-Curvature of Projective Cartan's Connection // Избр. вопр. соврем. матем. Калининград, 2005. С. 49—52.

10. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

Yu. Shevchenko[1]
[1] *Immanuel Kant Baltic Federal University*
14 A. Nevskogo ul., Kaliningrad, 236016, Russia
ESkrydlova@kantiana.ru

Hierarchy of spaces of projective connection

Submitted on May 30, 2018

We consider the bundle of projective frames over a smooth manifold, i. e. the principal bundle whose typical fiber is the projective group. The giving fundamental-group connection in this bundle transforms it into a space of general projective connection. Differential equations of components of the curvature tensor, their covariant derivatives and analogues of Bianchi identities are obtained.

When the basic and fiber indices coincide, a special case is identified, called the space of a pre-Cartan projective connection. By means of gluing the fibers to the base of the pre-Cartan connection space we obtain the space of the Cartan projective connection. In this case the curvature tensor is transformed into a curvature-torsion tensor, which contains the tensor of affine curvature-torsion with a torsion.

A hierarchy of the considered spaces is constructed, which there are a bundle of projective frames is at the beginning of the hierarchy, the space of projective connection (general, pre-Cartan and Cartan) is in the middle, a projective space is at the end of the hierarchy.

Keywords: bundle of projective frames, projective connection, analogues of Bianchi identities, pre-Cartan projective connection, gluing, projective Cartan connection, curvature-torsion tensor, tensor of affine curvature-torsion.

References

1. *Lumiste, Yu. G.:* Induced connections in embedded projective and affine bundles. Uchen.app. Tartu University. 177, 6—42 (1965) (in Russian).

2. *Shevchenko, Yu. I.:* Tangent and contiguous spaces of a projective bundle. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 38, 143—150 (2007) (in Russian).

3. *Laptev, G.F.:* Main infinitesimal structures of higher orders on smooth manifold. Tr. Geom. Semin. VINITI. M., vol. 1, 139—189 (1966) (in Russian).

4. *Shevchenko, Yu.I.:* Holonomic and semi-holonomic submanifolds of smooth manifolds, Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 37, 179—187 (2006) (in Russian).

5. *Shevchenko, Yu.I.:* Methods of Laptev and Lumiste for the definition of connectivity in the principal bundle. Differ. Geom. Mnogoobr. Figur. Kaliningrad. 46, 168—177 (2015) (in Russian).

6. *Evtushik, L.E, Lumiste, Yu.G., Ostianu, N.M., Shirokov, A.P.:* Differential-geometric structures on manifolds. Journal of Soviet Mathematics, **14**:6, 1573—1719 (1980).

7. *Shevchenko, Yu.I.:* On generalizations of the projective Cartan connection on a smooth manifold. IKBFU's Vestnik. Ser. Physics, Mathematics, and technology. Kaliningrad. 10, 60—68 (2014) (in Russian).

8. *Kobayasi, Sh.:* Groups of transformations in differential geometry. Moscow (1986) (in Russian).

9. *Shevchenko, Ju.I.:* Tensor of affine torsion-curvature of the projective Cartan's connection. Izbr. vopr. Sovrem. Math. Kaliningrad, pp. 49—52 (2005) (in Russian).

10. *Shevchenko, Ju.I.:* Clothings of centroprojective manifolds. Kaliningrad (2000).