ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

М.К.Кузьмин

R-СЕТИ В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ E_n

В евклидовом пространстве E_n вводится понятие R-сети. Приводятся достаточные условия (которые являются также необходимыми) для того, чтобы ортогональная сеть $\Sigma_n \subset E_n$ была R-сетью. Указывается верхняя граница произвола существования R-сетей в E_n. Рассматривается пример R-сети, определяющейся с максимальным произволом.

1. Пусть собственно евклидово пространство E_n отнесено к подвижному ортонормированному реперу $(x, \vec{e}_i)$ $(i, j, k = \overline{1,n})$. Деривационные формулы имеют вид

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega^j_i \vec{e}_j.$$

Пфаффовы формы ω^i, ω^j_i удовлетворяют условиям

$$\mathcal{D}\omega^i = \omega^j \wedge \omega^i_j, \quad \mathcal{D}\omega^j_i = \omega^k_i \wedge \omega^j_k,$$

$$\omega^j_i + \omega^i_j = 0. \tag{1}$$

2. Рассмотрим в E_n m-распределение $\Delta_m = \Delta(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$. Запишем его дифференциальные уравнения

$$\omega^\alpha_a = \Lambda^\alpha_{ai}\,\omega^i \tag{2}$$

$$(a, b, c, d = \overline{1,m}; \ \alpha = \overline{m+1,n}).$$

Форму кривизны распределения $\Delta_m(\vec{e}_a)$ [1]

$$\Omega^b_a = \mathcal{D}\omega^b_a - \omega^c_a \wedge \omega^b_c \tag{3}$$

можно записать также в виде

$$\Omega^b_a = R^b_{aij}\,\omega^i \wedge \omega^j,$$

где

$$R^b_{aij} = -\delta^{bc} \sum_\alpha (\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^\alpha_{cj} - \Lambda^\alpha_{aj}\Lambda^\alpha_{ci}).$$

Легко убедиться, что система функций R^b_{aij} образует тензор – тензор кривизны распределения $\Delta_m(\vec{e}_a)$.

Определение. Распределение $\Delta_m(\vec{e}_a)$ с нулевой формой кривизны, т.е. все компоненты тензора кривизны R^b_{aij} которого равны нулю, назовем R-плоским.

3. Рассмотрим в E_n ортогональную сеть Σ_n. Пусть единичные векторы $\vec{e}_i$ подвижного репера направлены по касательным к линиям сети в точке x, при этом имеем [1]:

$$\omega^j_i = a^j_{ik}\,\omega^k \ (i \neq j). \tag{4}$$

Из уравнений (2), (4) находим

$$a^\alpha_{ak} = \Lambda^\alpha_{ak}.$$

Определение. Если все распределения, порожденные ортогональной сетью Σ_n, R-плоские, то такую сеть назовем R-сетью.

4. Теорема. Ортогональная сеть Σ_n в E_n является R-сетью, если все n распределений Δ_{n-1}, порожденных этой сетью, R-плоские.

Доказательство. Рассмотрим распределения $\Delta_{n-1}(\vec{e}_a)$, $\Delta_\tau(\vec{e}_{a'})$ $(1 \le \tau < n-1)$, порожденные данной ортогональной сетью Σ_n. Запишем форму кривизны распределения $\Delta_{n-1}(\vec{e}_a)$: $\overset{\alpha}{\Omega}{}^b_a = -\omega^\alpha_a \wedge \omega^\alpha_b$ (по α нет суммирования). Отсюда тензор кривизны этого распределения имеет вид ${}^{\alpha}R^b_{aij} = -\delta^{bc}(\Lambda^\alpha_{ai}\Lambda^\alpha_{cj} - \Lambda^\alpha_{aj}\Lambda^\alpha_{ci})$.

Для распределения $\Delta_\tau(\vec{e}_{a'})$ имеем

$$R^{b'}_{a'ij} = \sum_{\alpha'} {}^{\alpha}R^{b'}_{a'ij}. \tag{5}$$

По условию

$$\overset{\alpha}{\Omega}{}^b_a = -\omega^\alpha_a \wedge \omega^\alpha_b = 0, \tag{6}$$

или можно записать равносильное этому равенство $R^{\alpha\ e}_{aij}=0\ (R^{\alpha'\ e'}_{a'ij}=0)$, откуда согласно соотношению (5) имеем $R^{e'}_{a'ij}=0$. Мы показали, что произвольное распределение $\Delta_2(\vec{e}_{a'})$, порожденное сетью Σ_n, R-плоское. Сеть Σ_n является R-сетью.

З а м е ч а н и е. Так как все n распределений Δ_{n-1} R-плоские, то объединяя все равенства вида (6), можно записать

$$\omega^k_i\wedge\omega^k_j=0\quad(k\neq i,j).\qquad(7)$$

Т е о р е м а. В ортонормированном репере $(x,\vec{e}_i)$, построенном на касательных к линиям R-сети, каждое из уравнений $\omega^j_i=0$ вполне интегрируемо.

В самом деле, в силу (1)

$$\mathcal{D}\omega^j_i=\omega^k_i\wedge\omega^j_k\quad(k\neq i,j),\qquad(8)$$

а в силу (7) все слагаемые в сумме (8) равны нулю, следовательно, $\mathcal{D}\omega^j_i=0$.

Т е о р е м а. Произвол существования R-сетей в E_n не превышает $[\frac{n}{2}]$ функций n аргументов.

В силу равенств (1) и (7) имеем, что число линейно независимых форм Пфаффа ω^j_i не превышает $[\frac{n}{2}]$, следовательно, старший характер системы уравнений, определяющей R-сеть, удовлетворяет условию $s_n\le[\frac{n}{2}]$. Теорема доказана.

Рассмотрим ортогональную сеть Σ_n в E_n, порождающую параллельные [2]$[\frac{n}{2}]$ 2-распределения и одно 1-распределение в случае нечетном n, размерность пересечения любой пары из которых равна нулю. Не нарушая общность рассуждений, распределения

$$\Delta_2(\vec{e}_1,\vec{e}_2),\dots,\Delta_2(\vec{e}_{2[\frac{n}{2}]-1},\vec{e}_{2[\frac{n}{2}]});\ \Delta_1(\vec{e}_n)$$

можно считать параллельными. Рассматриваемая ортогональная сеть Σ_n является R-сетью, ибо имеют место равенства

$$\omega^j_{2\ell-1}=0\ \left(j\neq 2\ell-2;\ 2\ell;\ \ell=\overline{1,[\tfrac{n}{2}]}\right)\qquad(9_1)$$

и при n нечетном к ним добавляются следующие равенства

$$\omega^i_n=0;\qquad(9_2)$$

в результате удовлетворяются равенства (7). На формы $\omega^2_1,\omega^4_3,\dots,\omega^{2[\frac{n}{2}]}_{2[\frac{n}{2}]-1}$ мы не накладываем никаких условий, кроме требования их линейной независимости.

С учетом равенств (1), (9) и (7) видим, что для нахождения произвола существования рассматриваемого класса сетей в E_n достаточно исследовать систему уравнений

$$\omega^{2\ell}_{2\ell-1}=a^{2\ell}_{2\ell-1,k}\,\omega^k\quad\left(\ell=\overline{1,[\tfrac{n}{2}]}\right).$$

Система ковариантов имеет вид

$$\Delta a^{2\ell}_{2\ell-1,k}\wedge\omega^k=0.$$

Легко убедиться, что исследуемая нами система уравнений находится в инволюции с характерами $s_1=s_2=\dots=s_n=[\frac{n}{2}]$. Рассматриваемый класс R-сетей в E_n определяется с произволом $[\frac{n}{2}]$ функций n аргументов.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т., Кузьмин М.К., Столяров А.В. Сети на многообразиях.-В сб.: Проблемы геометрии. Т.12. Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР. М., 1981, 97-125.

2. Ш и р о к о в А.П. Структуры на дифференцируемых многообразиях.- В сб.: Алгебра. Топология. Геометрия 1967. Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР. М., 1969, с. 127-188.