УДК 514.75

Б.А. Андреев
(Калининградский государственный университет)

О ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОМ ОТОБРАЖЕНИИ ТОЧЕЧНОГО ПРОСТРАНСТВА В МНОГООБРАЗИЕ ГИПЕРКВАДРИК

Изучается локальное дифференцируемое отображение точечного проективно-аффинного пространства P_n в специальное многообразие гиперквадрик другого точечного пространства. Найдены и геометрически охарактеризованы возникающие во 2-й дифференциальной окрестности инвариантные геометрические образы, в том числе обобщающие введенные ранее автором для точечных отображений главные точки. Доказаны 9 предложений, в которых изучаются свойства этих образов, в частности связь между главными прямыми отображения и фокальными многообразиями одномерных многообразий гиперквадрик.

Пусть P_n и P_m – проективно-аффинные [1, с. 483] пространства, отнесенные соответственно к подвижным реперам R={A, E_J} и r={a, e_i}, деривационные формулы которых имеют вид:

$$dA = \Omega^J E_J, dE_J = \Omega_J^K E_K, da = \omega^i e_i, de_i = \omega_i^j e_j \ (i,... = \overline{1,n}; J,\ldots = \overline{1,m}), \quad (1)$$

где формы Пфаффа подчиняются известным уравнениям структуры.

Рассмотрим в P_m многообразие Q_N всех центральных невырожденных гиперквадрик с общим центром C. Поместив начало a репера r в C, получим для произвольного элемента $q \in Q_N$

$$F \equiv a_{ij} x^i x^j - 1 = 0 \quad (a_{ij} = a_{ji}), \quad (2)$$

$$\det [a_{ij}] \neq 0 \quad (3)$$

и структурные формы $\nabla a_{ij} = da_{ij} - a_{it}\omega_j^t - a_{tj}\omega_i^t$. Таким образом, для ранга N [2] гиперквадрики $q \in Q_N$ имеем: $N = \frac{1}{2}m(m+1)$.

Положим n=N и рассмотрим локально определенное дифференцируемое отображение φ: $P \in P_n \mapsto q \in Q_N$, считая при этом $\operatorname{rang}\varphi = n$ в каждой точке определения отображения. Помещая начало A репера R в точку $P \in \varphi^{-1}(q)$, получаем дифференциальные уравнения отображения φ в виде:

$$\nabla a_{ij} = \Lambda_{ijI}\Omega^I. \qquad (4)$$

Продолжив систему (4) два раза, получим:

$$\nabla \Lambda_{ijJ} = \Lambda_{ijJK}\Omega^K,\ \nabla \Lambda_{ijJK} = \Lambda_{ijJKL}\Omega^L, \qquad (5)$$

где дифференциальный оператор ∇ действует по формуле

$$\nabla T_{iJ}^{jK} = dT_{iJ}^{jK} - T_{tJ}^{jK}\omega_i^t - T_{iT}^{jK}\Omega_J^T + T_{iJ}^{tK}\omega_t^j + T_{iJ}^{jT}\Omega_T^K. \qquad (6)$$

Для каждой точки P фундаментальным объектом $\Gamma_2 = \{\Lambda_{ijJ}, \Lambda_{ijJK}\}$ определяется инвариантное алгебраическое многообразие $J_\varphi \subset P_n$

$$\Phi_{ij} \equiv \Lambda_{ijJK}X^J X^K - 2\Lambda_{ijJ}X^J = 0, \qquad (7)$$

которое является обобщением введенной автором [3] индикатрисы J точечного отображения $f: P_m \to \tilde{P}_n$. Там же дается ее геометрическая характеристика; о последней см., напр., [4]. Имеем: $P \in J_\varphi$. J_φ является алгебраическим многообразием порядка 2^n точек, одна из которых – точка P.

Пусть Π_{n-1} – несобственная гиперплоскость пространства P_n, а $\overline{Q}_N$ – множество всех гиперповерхностей 2-го порядка вида (2). Очевидно имеем: $\dim \overline{Q}_N = N$. Обозначим символом Q_{N-1} множество $\overline{Q}_N \setminus Q_N$.

Как и в случае точечных отображений рассмотрим связку $K(P_J)$ касательных в точке P к φ дробно-линейных отображений:

$$a^*_{ij} = a_{ij} + \frac{\Lambda_{ijJ} X^J}{1 - P_K X^K}, \tag{8}$$

где a^*_{ij} – координаты гиперквадрики $q^* \in \overline{Q}_N$. Пусть l – параметризованная прямая вида $X^J = \Lambda^J t$, содержащая точку P, т.е. отображение l: $t \in R \to l(t) \in P_n$, $l(0)=P$.

Определение 1. Прямая l называется $K(P_J)$-главной, если отображения $\phi \circ l$ и $K(P_J) \circ l$ имеют в P касание 2-го порядка (ср. [5, с. 71]).

Из разложения в ряды Тейлора отображений $\phi \circ l$ и $K(P_J) \circ l$ получаем следующее условие того, что прямая l является $K(P_J)$-главной:

$$\Lambda_{ijJK} \Lambda^J \Lambda^K = 2 \Lambda_{ijJ} P_K \Lambda^J \Lambda^K. \tag{9}$$

Из формул (2.7) [6] и (9) вытекает

Предложение 1. Если прямая l является $K(P_J)$-главной, то фокальные многообразия первого и второго порядков параметризованного многообразия $f \circ l$ совпадают.

При помощи понятия $K(P_J)$-главных прямых можно получить геометрическую характеристику индикатрисы J_φ. Обозначим символом $[J_\varphi]$ множество прямых вида [PM], где $M \in J_\varphi \backslash \{P\}$. Из (7) и (9) следует

Предложение 2. Множество $[J_\varphi]$ состоит из $K(P_J)$-главных прямых.

Пусть X^J – координаты точки $M \neq P$, лежащей на $K(P_J)$-главной прямой. Легко показать, что условие $K(P_J)(M) \in J_\varphi$ имеет вид:

$$P_K X^K = 1. \tag{10}$$

Определение 2. Точка $M \in P_n$ называется главной точкой отображения φ (относительно P), если: 1) существует касательное к φ в P дробно-линейное $K(P_J)$, такое, что прямая [PM] является для него главной, и 2) $K(P_J)(M)\in Q_{N-1}$, причем $C\in K(P_J)(M)$.

Непосредственным подсчетом устанавливается, что условие (10) для точки $M=\{S^J\}$ $K(P_J)$-главной прямой приводит к равенству

$$\Lambda_{ijJ}S^J x^i x^j = 0 \tag{11}$$

для ее образа при отображении $K(P_J)$. Но кривая 2-го порядка (11) удовлетворяет условию 2) определения 2. Отсюда вытекает

Предложение 3. Множество $J_\varphi \backslash \{P\}$ является множеством главных точек отображения φ.

Из определения отображения φ следует, что для него существует обратное отображение φ^{-1}: $q\in Q \mapsto P\in P_N$. Из (4) получаем его дифференциальные уравнения

$$\Omega^J = V^{Jij}\nabla a_{ij}, \tag{12}$$

причем

$$V^{Jij} = V^{Jji}, \quad \Lambda_{ijK}V^{Jij} = \delta^J_K, \quad \Lambda_{ijT}V^{Tpq} = \frac{1}{2}\delta^p_{(i}\delta^q_{j)}, \tag{13}$$

где скобки означают циклирование. Из (4) и (12) вытекает

$$\nabla V^{Jij} = -V^{Jpq}V^{Tij}\Lambda_{pqTK}\Omega^K. \tag{14}$$

Предложение 4. Функции

$$\Gamma^L_{JK} = V^{Lij}\Lambda_{ijJK} \tag{15}$$

задают в P_m локально-аффинную связность.

Доказательство. Пусть $\theta^J = \Omega^J$ и $\theta^J_K = \Omega^J_K + \Gamma^J_{KL}\Omega^L$. Из (5), (14) следует

$$D\theta^J = \theta^T \wedge \theta^J_T + \frac{1}{2}S^J_{PQ}\theta^P \wedge \theta^Q, \; D\theta^J_K = \theta^T_K \wedge \theta^J_T + \frac{1}{2}R^J_{PQK}\theta^P \wedge \theta^Q,$$

где $S^J_{PQ} = 0,\; R^J_{PQK} = 0,$ что доказывает предложение.

Для введенной связности Г выполняются соотношения

$$\Lambda_{ijJK} = \Gamma^{T}_{JK}\Lambda_{ijT}, \tag{16}$$

которые, как вытекает из (5.2) [5], показывают, что связность Г является обобщением связности Врэнчану [5; 7] точечного соответствия для отображения φ.

Рассмотрим дробно-линейное отображение $K_c \in K(P_J)$, которое характеризуется соотношением

$$P_J = \frac{1}{n+1}\Gamma_J \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n+1}\Gamma^{T}_{TJ}. \tag{17}$$

Оно является аналогом введенной Э. Чехом [8] для точечного соответствия так называемой локальной коллинеации, поэтому и в нашем случае будем называть отображение K_c отображением Чеха.

Пусть φ_1: $P_n \to Q$ – линейное отображение, касательное к φ в точке P. Тогда композиции

$$f = \phi_1^{-1} \circ \phi,\ \text{æ}(P_J) = \phi_1^{-1} \circ K(P_J) \tag{18}$$

являются отображениями $P_n \to P_n$. Легко показать, что æ(P_J) составляют связку касательных к f в P коллинеаций, причем локальная коллинеация Чеха æ_c определяется соотношениями (17), т. е. локальная коллинеация Чеха æ_c отображения f соответствует локальному отображению Чеха K_c отображения φ. Вопрос о характеристике локальной коллинеации Чеха был рассмотрен ранее (см., напр., [4]). Имеем

Предложение 5. Локальная коллинеация Чеха æ_c характеризуется условием: точка P является стационарной точкой якобиана отображения $(\text{æ}(P_J))^{-1} \circ f$ при $\text{æ}(P_J) = \text{æ}_c$.

Из (18) получаем: $(\text{æ}(P_J))^{-1} \circ f = (K(P_J))^{-1} \circ \phi_1 \circ \phi_1^{-1} \circ \phi =$ $= (K(P_J))^{-1} \circ \phi.$ Тогда из предыдущего предложения вытекает

Предложение 6. Локальное отображение Чеха K_c характеризуется условием: точка P является стационарной точкой якобиана отображения $K_c^{-1} \circ \phi$.

Легко показать, что система (7), определяющая многообразие J_φ, эквивалентна системе

$$\Gamma^L_{JK} X^J X^K - 2X^L = 0. \qquad (19)$$

Объектом Γ_2 для каждой точки P определяется инцидентная ей гиперквадрика $Q_c \subset P_n$:

$$\Gamma_T(\Gamma^T_{JK} X^J X^K - 2X^T) = 0, \qquad (20)$$

которую будем называть гиперквадрикой Чеха отображения φ. Заметим, что Q_c содержит все главные точки и точку P. Кроме Q_c отображение K_c определяет для каждой точки P гиперплоскость Π_c:

$$\Gamma_J X^J = n + 1. \qquad (21)$$

Назовем ее гиперплоскостью Чеха отображения φ. Из определения отображения φ_1 и формул (8), (15), (17), (21) получаем ее геометрическую характеристику:

Предложение 7. Гиперплоскость Чеха Π_c отображения φ является прообразом несобственной гиперплоскости Π_{n-1} пространства P_n при отображении $\phi_1^{-1} \circ K_c$.

Предложение 8. Касательная гиперплоскость в точке P к гиперквадрике Чеха Q_c параллельна гиперплоскости Чеха Π_c. Ее уравнение имеет вид: $\Gamma_J X^J = 0$.

Рассмотрим связку гиперквадрик вида

$$\alpha_T(\Gamma^T_{JK} X^J X^K - 2X^T) = 0. \qquad (22)$$

Предложение 9. Единственной гиперквадрикой в связке (22), касательная к которой в точке P параллельна гиперплоскости Чеха Π_c отображения φ, является гиперквадрика Чеха Q_c.

Последнее предложение полностью геометрически характеризует гиперквадрику Q_c.

Список литературы

1. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М., 1979.

2. *Малаховский В.С.* Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1969. Т. 2. С. 179 – 206.

3. *Андреев Б.А.* К геометрии дифференцируемого отображения f: $P_m \to \hat{P}_n$ ($m \geq n$) // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1987. Вып. 18. С. 5 – 9.

4. *Андреев Б.А.* Гиперквадрика Чеха точечного соответствия // Там же, 2002. Вып. 33. С. 5 – 7.

5. *Рыжков В.В.* Дифференциальная геометрия точечных соответствий между пространствами // Геометрия. 1963. Итоги науки / ВИНИТИ. М., 1965. С. 65 – 107.

6. *Малаховский В.С., Махоркин В.В.* Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1974. Т. 6. С. 113 – 133.

7. *Vranceanu G.* Sul tensore associato ad una corrispondenza fra spazi proettivi // Boll. Unione mat. ital. 1957. Vol. 12. №4. P. 489 – 506.

8. *Чех Э.* Проективная дифференциальная геометрия соответствий между пространствами // Чехосл. мат. журн. 1952. №1. С. 91 – 107.

B. Andreev

ON DIFFERENTIABLE MAPPING OF POINT SPACE INTO MANIFOLD OF HYPERQUADRICS

The local differentiable mapping of point projective-affine space P_n into special manifold of hyperquadrics of other point space is studied. Invariant geometrical images are found and interpreted geometrically; one of them generalizes the notion of principal points, which were defined by the author earlier for point mappings. 9 propositions are proved about properties of this images, in particular it is the connection between principal lines of mapping and focal manifolds of one-dimensional manifolds of hyperquadrics.