2. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: учеб. пособие. Калининград, 1983.

3. *Остиану Н.М.* О геометрии многомерной поверхности проективного пространства // Тр. геом. семинара/ ВИНИТИ АН СССР. 1966. Т. 1. С. 239—263.

4. *Домбровский Р.Ф.* Поля геометрических объектов на многомерных касательно оснащенных поверхностях в P_n // Проблемы геометрии. М., 1975. С. 153—171.

5. *Норден А.П., Тимофеев Г.Н.* Инвариантные признаки специальных композиций многомерных пространств// Изв. вузов. Матем. М., 1972. С. 81—89.

S. Volkova

NORDEN — TIMOFEEV PLANES OF REGULAR TANGENTIAL r-EQUIPED HYPERSTRIP IN THE PROJECTIVE SPASE

It is shown, that invariant field of TΛ-virtual normals of the 1-st kind induces invariant field of Norden — Timofeev planes, i.e. field of normals of 2-nd kind for the hyperstrip $H_{m(r)} \subset P_n$.

УДК 514.75

А. В. Вялова

(Калининградский государственный технический университет)

ВНУТРЕННЕЕ ОСНАЩЕНИЕ НОРМАЛЬНО ЦЕНТРИРОВАННОЙ ТАНГЕНЦИАЛЬНО ВЫРОЖДЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В n-мерном проективном пространстве P_n рассмотрена нормально центрированная [1] тангенциально вырожденная поверхность S^*_m, представленная многообразием пар плоскостей (L_h, T_r) (m = h + r), причем центр C каждой образующей L^*_h описывает r-мерную поверхность X_r, а касательная плоскость T_r к этой поверхности и образующая L^*_h пересекаются лишь в центре C. Произведено композиционное оснащение поверхности S^*_m. Доказано, что в предположении существования двух относительных инвариантов, композиционное оснащение строится внутренним образом.

Пусть индексы принимают следующие серии значений:

$$a,\ldots=\overline{1,h};\quad i,\ldots=\overline{h+1,m};\quad \alpha,\ldots=\overline{m+1,n}.$$

Уравнения нормально центрированной тангенциально вырожденной поверхности относительно репера $R=\{A,A_a,A_i,A_\alpha\}$, где точки A_a помещены на плоскую образующую L^*_h, A — в центр C, A_i — на касательную плоскость T_r поверхности X_r, имеют вид [2]

$$\omega^a=0,\quad \omega^\alpha=0,\quad \omega^\alpha_a=0,\quad \omega^\alpha_i=\Lambda^\alpha_{ij}\omega^j, \tag{1}$$

$$\omega^a_i=\Lambda^a_{ij}\omega^j,\quad \omega^i_a=\Lambda^i_{aj}\omega^j.$$

Функции Λ^α_{ij}, $\Lambda^a_{ij},\Lambda^i_{aj}$ составляют фундаментальный объект 1-го порядка Λ^1 поверхности S^*_m. Его компоненты удовлетворяют соотношениям [2] $\Lambda^\alpha_{[ij]}=0$, $\Lambda^a_{[ij]}=0$, $\Lambda^i_{a[j}\Lambda^\alpha_{ik]}=0$ и следующим уравнениям:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ij}=\Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k,\ \Delta\Lambda^a_{ij}+\Lambda^\alpha_{ij}\omega^a_\alpha=\Lambda^a_{ijk}\omega^k,\ \Delta\Lambda^i_{aj}-\delta^i_j\omega_a=\Lambda^i_{ajk}\omega^k, \tag{2}$$

где тензорный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Lambda^\alpha_{ij}=d\Lambda^\alpha_{ij}-\Lambda^\alpha_{kj}\omega^k_i-\Lambda^\alpha_{ik}\omega^k_j+\Lambda^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta.$$

Утверждение 1. *Фундаментальный объект первого порядка* Λ^1 *поверхности* S^*_m *является квазитензором, содержащим простейший и простой тензоры:* $\{\Lambda^\alpha_{ij}\}$, $\{\Lambda^\alpha_{ij},\Lambda^a_{ij}\}$.

Компоненты фундаментального объекта 2-го порядка $\Lambda^2 = \{\Lambda^1, \Lambda^i_{ajk}, \Lambda^\alpha_{ijk}, \Lambda^a_{ijk}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2) и следующим сравнениям по модулю базисных форм ω^1:

$$\begin{aligned} &\Delta\Lambda^\alpha_{ijk} - (\Lambda^\beta_{ij}\Lambda^\alpha_{kl} + \Lambda^\beta_{ik}\Lambda^\alpha_{jl})\omega^l_\beta + \Lambda^\alpha_{kj}\omega_i \equiv 0, \\ &\Delta\Lambda^a_{ijk} + \Lambda^\alpha_{ijk}\omega^a_\alpha - (\Lambda^\alpha_{ij}\Lambda^a_{lk} + \Lambda^a_{il}\Lambda^\alpha_{jk} + \Lambda^\alpha_{ki}\Lambda^a_{jl})\omega^l_\alpha + \\ &\qquad + (\Lambda^a_{ik}\omega_j + \Lambda^a_{ij}\omega_k + \Lambda^a_{kj}\omega_i) \equiv 0, \\ &\Delta\Lambda^i_{ajk} + \Lambda^i_{aj}\omega_k - \delta^i_j\Lambda^l_{ak}\omega_l \equiv 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Предположим [3], что существует нетривиальный относительный инвариант $I = I(\Lambda^\alpha_{ij})$. Дифференциальное уравнение для любого относительного инварианта I имеет вид:

$$dI = I(\lambda\omega^a_a + \mu\omega^i_i + \nu\omega^\alpha_\alpha) + \tilde{I}_i\omega^i, \tag{4}$$

где λ, μ, ν — некоторые коэффициенты. Присоединим к нормально центрированной тангенциально вырожденной поверхности подобъект первого порядка $\{V^{ij}_\alpha\}$, компоненты которого являются частными производными логарифма инварианта по компонентам фундаментального подобъекта Λ^α_{ij}:

$$V^{ij}_\alpha = \frac{\partial \ln I}{\partial \Lambda^\alpha_{ij}}. \tag{5}$$

Этот объект будем называть обращенным подобъектом 1-го порядка тангенциально вырожденной поверхности. Из (5) с учетом дифференциальных уравнений (2_1) следует:

$$\begin{aligned} d\ln I = V^{ij}_\alpha d\Lambda^\alpha_{ij} &= V^{ij}_\alpha(\Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k - \Lambda^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta + \Lambda^\alpha_{kj}\omega^k_i + \Lambda^\alpha_{ik}\omega^k_j) = \\ &= V^{ij}_\alpha\Lambda^\alpha_{ijk}\omega^k - V^{ij}_\alpha\Lambda^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta + V^{ij}_\alpha\Lambda^\alpha_{kj}\omega^k_i + V^{ij}_\alpha\Lambda^\alpha_{ik}\omega^k_j. \end{aligned}$$

Сопоставляя полученное с уравнением (4), имеем

$$V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{ij} = -\nu\delta^{\beta}_{\alpha}, \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kj} = \frac{\mu}{2}\delta^{i}_{k}, \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ik} = \frac{\mu}{2}\delta^{j}_{k}. \qquad (6)$$

Сворачивая (6) по индексам i и j, α и β, получим:

$$V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij} = -\nu(n-m), \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij} = \frac{\mu}{2}r, \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij} = \frac{\mu}{2}r,$$

откуда $\mu = \frac{2}{r}V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij}, \quad \nu = -\frac{1}{n-m}V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij}$. Пусть $V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ij} = r(n-m)$, тогда $\mu = 2(n-m), \quad \nu = -r$. Уравнение (4) для относительного инварианта I принимает вид

$$d\ln I = 2(n-m)\omega^{i}_{i} - r\omega^{\alpha}_{\alpha} + I_{i}\omega^{i} \quad (I_{i} = \frac{\tilde{I}_{i}}{I}),$$

а компоненты обращенного подобъекта $\{V^{ij}_{\alpha}\}$ связаны с компонентами подобъекта Λ^{α}_{ij} соотношениями:

$$V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\beta}_{ij} = r\delta^{\beta}_{\alpha}, \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{kj} = (n-m)\delta^{i}_{k}, \quad V^{ij}_{\alpha}\Lambda^{\alpha}_{ik} = (n-m)\delta^{j}_{k}. \qquad (7)$$

Поскольку компоненты тензора $\{\Lambda^{\alpha}_{ij}\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям (2_1), дифференциальные сравнения для компонент $\{V^{ij}_{\alpha}\}$ имеют вид: $\Delta V^{ij}_{\alpha} \equiv 0$. Таким образом, обращенный подобъект первого порядка $\{V^{ij}_{\alpha}\}$ является тензором.

Произведем композиционное оснащение тангенциально вырожденной поверхности S^{*}_{m}, состоящее в присоединении к каждой касательной плоскости $T_m = [T_r, P_{h-1}]$ $(P_{h-1} : P_{h-1} \oplus A = L^{*}_{h})$ следующих плоскостей: 1) $C_{n-m-1} : T_m \oplus C_{n-m-1} = P_n$ — плоскости Картана; 2) $N_{m-1} : A \notin N_{m-1} \subset T_m$ — нормали 2-го рода А. П. Нордена. Плоскость Картана C_{n-m-1} определяется совокупностью точек $B_{\alpha} = A_{\alpha} + \lambda^{a}_{\alpha}A_{a} + \lambda^{i}_{\alpha}A_{i} + \lambda_{\alpha}A$, а нормаль

2-го рода N_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$, $B_i = A_i + \lambda_i A$, причем совокупность точек B_a задает плоскость $P_{h-1} = N_{m-1} \bigcap L_h^*$, а точки B_i определяют нормаль 2-го рода $N_{r-1} = N_{m-1} \bigcap T_r$ для поверхности центров X_r.

Композиционное оснащение задается квазитензором $\lambda = (\lambda_a, \lambda_i, \lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha)$, компоненты которого удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\Delta\lambda_a + \omega_a = \lambda_{ai}\omega^i, \quad \Delta\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j,$$
$$\Delta\lambda_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \lambda_{\alpha j}^i\omega^j, \quad \Delta\lambda_\alpha^a + \omega_\alpha^a = \lambda_{\alpha i}^a\omega^i, \tag{8}$$
$$\Delta\lambda_\alpha + \lambda_\alpha^a\omega_a + \lambda_\alpha^i\omega_i + \omega_\alpha = \lambda_{\alpha i}\omega^i.$$

Утверждение 2. *Оснащающий объект* λ *поверхности* S_m^* *является квазитензором, содержащим 4 простейших и 1 простой подквазитензоры:* $\{\lambda_a\}, \{\lambda_i\}, \{\lambda_\alpha^i\}, \{\lambda_\alpha^a\}, \{\lambda_\alpha, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha^i\}$.

Найдены уравнения на пфаффовы производные 1-го и 2-го порядков компонент оснащающего квазитензора. Для дальнейшего рассмотрения нам понадобятся следующие из них:

$$\Delta\lambda_{\alpha i}^a + (\lambda_\beta^a\Lambda_{ij}^\beta - \Lambda_{ij}^a)\omega_\alpha^j = \lambda_{\alpha ij}^a\omega^j,$$
$$\Delta\lambda_{\alpha j}^i + \lambda_\alpha^k\Lambda_{kj}^\beta\omega_\beta^i + \lambda_\beta^i\Lambda_{kj}^\beta\omega_\alpha^k - \Lambda_{aj}^i\omega_\alpha^a - \delta_j^i(\omega_\alpha + \lambda_\alpha^k\omega_k) = \lambda_{\alpha jk}^i\omega^k. \tag{9}$$

Построим охваты компонент оснащающего квазитензора:

1. Охватим простейший подквазитензор $\{\lambda_a\}$, определяющий $(h-1)$-мерную плоскость $P_{h-1} \subset L_h^*$, $A \notin P_{h-1}$. Для этого свернем сравнения, полученные из (2_3) по индексам i и j:

$$\Delta\Lambda_{ai}^i - r\omega_a \equiv 0, \quad \times(-\frac{1}{r}); \quad -\frac{1}{r}\Delta\Lambda_{ai}^i + \omega_a \equiv 0 .$$

Сопоставляя полученное с уравнениями (8_1), построим охват компонент квазитензора $\{\lambda_a\}$ по формулам:

$$\lambda_a = -\frac{1}{r}\Lambda^i_{ai}. \qquad (10)$$

2. Охватим простейший подквазитензор $\{\lambda^a_\alpha\}$, определяющий плоскость $P_{n-h} : L^*_h + P_{n-h} = P_n$, $L^*_h \cap P_{n-h} = A$, аффинно дополняющую центрированную образующую L^*_h до объемлющего пространства. Для этого домножим дифференциальные уравнения (2_2) на компоненты V^{ij}_β:

$$V^{ij}_\beta \Delta\Lambda^a_{ij} + V^{ij}_\beta \Lambda^\alpha_{ij}\omega^a_\alpha = V^{ij}_\beta \Lambda^a_{ijk}\omega^k.$$

Воспользовавшись сверткой (7_1) и тем, что объект $\{V^{ij}_\alpha\}$ — тензор, разделим обе части уравнений на r:

$$\frac{1}{r}\Delta(\Lambda^a_{ij}V^{ij}_\beta) + \omega^a_\beta = \frac{1}{r}V^{ij}_\beta \Lambda^a_{ijk}\omega^k.$$

Введем обозначения:

$$\lambda^a_\alpha = \frac{1}{r}\Lambda^a_{ij}V^{ij}_\alpha, \quad \lambda^a_{\alpha k} = \frac{1}{r}\Lambda^a_{ijk}V^{ij}_\alpha, \qquad (11)$$

и перепишем последние уравнения в виде (8_4).

3. Охватим простейший подквазитензор $\{\lambda^i_\alpha\}$, определяющий нормаль 1-го рода $P_{n-m} : T_m \cap P_{n-m} = A$. Для этого перепишем сравнения на пфаффовы производные компонент простейшего подквазитензора $\{\lambda^a_\alpha\}$ в виде

$$\Delta\lambda^a_{\alpha i} + T^a_{ij}\omega^j_\alpha = \lambda^a_{\alpha ij}\omega^j \;\; (T^a_{ij} = \Lambda^\beta_{ij}\lambda^a_\beta - \Lambda^a_{ij}). \qquad (12)$$

Объект T^a_{ij} с симметричными по нижним индексам компонентами является тензором, так как он удовлетворяет сравнениям $\Delta T^a_{ij} \equiv 0$. Обратим тензор T^a_{ij}. В предположении, что существует инвариант $J = J(T^a_{ij})$, присоединим к поверхности S^*_m подобъект $\perp_a^{ij}$. Компоненты объекта T_{ij}^a связаны с компонентами обращенного объекта $\perp_a^{ij}$ соотношениями:

$$\perp_a^{ij} T_{kj}^a = h\delta_k^i, \qquad \perp_a^{ij} T_{ik}^a = h\delta_k^j, \qquad \perp_a^{ij} T_{ij}^b = r\delta_a^b. \qquad (13)$$

Обращенный объект $\perp_a^{ij}$ является тензором, так как $\Delta \perp_a^{ij} \equiv 0$. Домножим уравнения (12) на обращенный объект $\perp_a^{ik}$ и воспользуемся сверткой (13_2):

$$\perp_a^{ik} \Delta\lambda_{\alpha i}^a + h\delta_j^k \omega_\alpha^j = \perp_a^{ik} \lambda_{\alpha ij}^a \omega^j.$$

Учитывая, что $\perp_a^{ik}$ — тензор, разделим обе части последних уравнений на h:

$$\frac{1}{h}\Delta(\lambda_{\alpha i}^a \perp_a^{ik}) + \omega_\alpha^k = \frac{1}{h} \perp_a^{ik} \lambda_{\alpha ij}^a \omega^j.$$

Вводя обозначения:

$$\lambda_\alpha^i = \frac{1}{h}\lambda_{\alpha j}^a \perp_a^{ji}, \qquad \lambda_{\alpha j}^i = \frac{1}{h}\lambda_{\alpha kj}^a \perp_a^{ki}, \qquad (14)$$

получим уравнения (8_3).

4. Охватим простейший подквазитензор $\{\lambda_i\}$, определяющий нормаль 2-го рода P_{r-1} поверхности $X_r : P_{r-1} \subset T_r$, $A \notin P_{r-1}$. Для этого домножим сравнения (3_1) на компоненты обращенного подобъекта V_α^{mj}:

$$V_\alpha^{mj}\Delta\Lambda_{ijk}^\alpha - V_\alpha^{mj}(\Lambda_{kl}^\alpha\Lambda_{ij}^\beta + \Lambda_{jl}^\alpha\Lambda_{ik}^\beta)\omega_\beta^l + V_\alpha^{mj}\Lambda_{kj}^\alpha\omega_i \equiv 0.$$

Воспользуемся сверткой (7_2) и свернем полученное сравнение по индексам m и k:

$$V_\alpha^{kj}\Delta\Lambda_{ijk}^\alpha - V_\alpha^{kj}(\Lambda_{kl}^\alpha\Lambda_{ij}^\beta + \Lambda_{jl}^\alpha\Lambda_{ik}^\beta)\omega_\beta^l + r(n-m)\omega_i \equiv 0.$$

Учитывая, что подобъект V_α^{kj} — тензор и применяя свертку (7_3), получим:

$$\Delta(V_\alpha^{kj}\Lambda_{ijk}^\alpha)-(n-m)(\delta_l^j\Lambda_{ij}^\beta+\delta_l^k\Lambda_{ik}^\beta)\omega_\beta^l+r(n-m)\omega_i\equiv 0,\qquad \times\frac{1}{n-m}$$

$$\frac{1}{n-m}\Delta(V_\alpha^{kj}\Lambda_{ijk}^\alpha)-2\Lambda_{il}^\beta\omega_\beta^l+r\omega_i\equiv 0,\qquad \times\frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r(n-m)}\Delta(V_\alpha^{kj}\Lambda_{ijk}^\alpha+2(n-m)\Lambda_{il}^\beta\lambda_\beta^l)+\omega_i\equiv 0.$$

Введем обозначения:

$$\lambda_i=\frac{1}{r(n-m)}(V_\alpha^{kj}\Lambda_{ijk}^\alpha+2(n-m)\Lambda_{il}^\beta\lambda_\beta^l)\,. \tag{15}$$

Последние сравнения с учетом обозначения (15) можно переписать в виде (8_2).

5. Построим охват компонент λ_α простого подквазитензора $\{\lambda_\alpha^i, \lambda_\alpha^a, \lambda_\alpha\}$, определяющего плоскость Картана P_{n-m-1}, компоненты λ_α^a, λ_α^i которого уже охвачены по формулам (11), (14). Для этого дифференциальные сравнения, полученные из (9_3), свернем по индексам i и j:

$$\Delta\lambda_{\alpha i}^i+\lambda_\alpha^k\Lambda_{ki}^\beta\omega_\beta^i+\lambda_\beta^i\Lambda_{ki}^\beta\omega_\alpha^k-\Lambda_{ai}^i\omega_\alpha^a-r(\lambda_\alpha^i\omega_i+\omega_\alpha)\equiv 0\,.$$

Внося часть слагаемых под знак оператора Δ с учетом дифференциальных уравнений $(8_{3,4})$, (2) на компоненты оснащающих подквазитензоров $\{\lambda_\alpha^a\}$, $\{\lambda_\alpha^i\}$ и компоненты фундаментального объекта Λ^1, найдем

$$\Delta(\lambda_{\alpha i}^i-\lambda_\alpha^k\Lambda_{ki}^\beta\lambda_\beta^i+\Lambda_{ai}^i\lambda_\alpha^a)-r(\lambda_\alpha^i\omega_i+\lambda_\alpha^a\omega_a+\omega_\alpha)\equiv 0,\qquad \times(-\frac{1}{r})$$

$$-\frac{1}{r}\Delta(\lambda_{\alpha i}^i-\lambda_\alpha^k\Lambda_{ki}^\beta\lambda_\beta^i+\Lambda_{ai}^i\lambda_\alpha^a)+\lambda_\alpha^i\omega_i+\lambda_\alpha^a\omega_a+\omega_\alpha\equiv 0.$$

Введем обозначения:

$$\lambda_\alpha=-\frac{1}{r}(\lambda_{\alpha i}^i-\lambda_\alpha^k\Lambda_{ki}^\beta\lambda_\beta^i+\Lambda_{ai}^i\lambda_\alpha^a)\,, \tag{16}$$

тогда последние сравнения перепишутся в виде (8_5).

Теорема. *В предположении существования двух относительных инвариантов* $\mathrm{I} = \mathrm{I}(\Lambda^{\alpha}_{ij}),\ \ \mathrm{J} = \mathrm{J}(\mathrm{T}^{a}_{ij})$ *внутреннее композиционное оснащение поверхности* S^{*}_{m} *определяется оснащающим квазитензором* λ*, компоненты которого охватываются по формулам (10), (11), (14)—(16).*

Список литературы

1. *Вагнер В.В.* Теория поля локальных гиперполос // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. М., 1950. Вып. 8. С. 197—272.
2. *Chernov D.S.* Composite equipment of normal centered tangential degenerated surface // Избранные вопросы современной математики. Калининград, 2005. С. 13—17.
3. *Омельян О.М.* Внутренние групповые связности на распределении плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И.Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. С. 120—125.

A. Vyalova

INNER CLOTHING OF NORMALLY CENTERED TANGENTIAL DEGENERATE SURFACE

In the n-dimensional projective space P_n normally centered [1] tangential degenerate surface S^{*}_{m}, as a manifold of pair planes $(\mathrm{L}_h, \mathrm{T}_r)$ (m=h+r), is considered. Here center C of each plane L^{*}_{h} describes r-dimensional surface X_r and tangent plane T_r to this surface and generator L^{*}_{h} are intersected only at the center C. The composite clothing of the surface S^{*}_{m} is made. It is proved, that assuming existence of two relative invariants composite clothing is built in the inner way.