ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.14 1983

УДК 514.75

В.С.Малаховский

О ФОКАЛЬНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ КОНГРУЭНЦИИ КВАДРИК ЛИ

Исследуется фокальное многообразие конгруэнции квадрик Ли Q поверхности S в P_3. Доказано, что если поверхность S -линейчатая, то множество фокальных точек квадрики Ли состоит только из точек прямолинейной образующей поверхности S, лежащей на квадрике Q.

Отнесем конгруэнцию (Q) квадрик Ли поверхности S к каноническому реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ Финикова поверхности S [1], где A_0 -текущая точка поверхности A_0A_i ($i,j,k=1,2$)-асимптотические касательные, A_1A_2 и A_0A_3 - директрисы Вильчинского, причем $A_3 \in Q$.

Система Пфаффовых уравнений конгруэнции (Q) запишется в виде:

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_i^j = \beta_i \omega^i, \quad \omega_i^3 = \omega^j,$$
$$\omega_i^0 = \omega_3^j, \quad \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \quad \omega_3^0 = b_2^1\omega^1 + b_1^2\omega^2, \tag{1}$$
$$\omega_1^1 + \omega_2^2 = 0, \quad \omega_1^1 - \omega_2^2 = \alpha_1\omega^1 - \alpha_2\omega^2, \quad \omega_3^3 = \omega_0^0 = 3(\alpha_1\omega^1 + \alpha_2\omega^2),$$

где $\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i$, $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится.

Уравнение квадрики Q имеет вид:

$$F \equiv x^1x^2 - x^0x^3 = 0. \tag{2}$$

Так как

$$dF = 2\theta F + (b_2^1(x^3)^2 - \beta_1(x^1)^2)\omega^1 + (b_1^2(x^3)^2 - \beta_2(x^2)^2)\omega^2, \tag{3}$$

где θ -форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, то фокальные точки квадрики Q [2] определяются системой уравнений:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0,$$
$$b_2^1(x^3)^2 - \beta_1(x^1)^2 = 0, \tag{4}$$
$$b_1^2(x^3)^2 - \beta_2(x^2)^2 = 0$$

Анализируя эту систему, убеждаемся, что точка A_0 - четырехкратная фокальная точка квадрики Q.

Т е о р е м а 1. Если поверхность S -нелинейная, то кратность фокальной точки A_0 квадрики Q не может быть выше четырех.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\beta_1\beta_2 \neq 0$. Тогда четыре фокальные точки квадрики Q, образующие вместе с A_0 полную совокупность всех фокальных точек, определяются формулами:

$$M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} = \varepsilon_1\varepsilon_2\sqrt{\frac{b_1^2 b_2^1}{\beta_1\beta_2}}A_0 + \varepsilon_1\sqrt{\frac{b_2^1}{\beta_1}}A_1 + \varepsilon_2\sqrt{\frac{b_1^2}{\beta_2}}A_2 + A_3, \tag{5}$$

где $\varepsilon_1^2 = 1$, $\varepsilon_2^2 = 1$. Из этих формул следует, что A_0 не может совпадать ни с одной из этих точек. Точки $M_{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ являются вершинами четырехсторонника Демулена.

Т е о р е м а 2. Если поверхность S -линейчатая, то множество фокальных точек квадрики Q состоит только из точек прямолинейной образующей поверхности S, лежащей на квадрике Q.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть, например, $\beta_1 = 0$, т.е. A_0A_1 -прямолинейная образующая поверхности. Тогда из замыкания уравнения $\omega_1^2 = 0$ следует $b_1^2 = 0$. Система уравнений (4) приводится к виду:

$$x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad b_2^1(x^3)^2 = 0, \quad \beta_2(x^2)^2 = 0. \tag{6}$$

Этой системе удовлетворяют только точки прямой A_0A_1.

Т е о р е м а 3. Фокальная точка квадрики Ли нелинейчатой поверхности S, отличная от точки A_0, тогда и только тогда является двукратной фокальной точкой, когда одна пара прямых Демулена [1] совпадает.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из формул (5) следует, что характеристическим признаком двукратности одной из фокальных точек (5) является равенство $b_1^2 b_2^1 = 0$, что приводит к совпадению одной из пар прямых Демулена.

В частности, для пары поверхностей Годо, т.е. при $b_1^2 - b_2^1 = 0$, все четыре фокальные поверхности $M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}$ сливаются в одну – поверхность (A_3).

Список литературы

1. Фиников С.П. Проективно-дифференциальная геометрия ОНТИ. М.-Л., 1937.

2. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.-Тр.геометр. семинара ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с. 113-136.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 14 1983

УДК 514.75

С.В. М а ц и е в с к и й

КОМПЛЕКС ЛИНЕЙЧАТЫХ НЕВЫРОЖДЕННЫХ КВАДРИК В ТРЕХМЕРНОМ ПРОЕКТИВНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассмотрен комплекс K линейчатых невырожденных квадрик Q. Найден характеристический признак класса с непустым фокальным многообразием квадрики Q и показано, что в общем случае существует сдвоенная фокальная точка. Показано, что рассматривать фокальные точки порядка выше второго не имеет смысла. Исследован класс с фокальным автополярным тетраэдром.

1. Комплекс с непустым фокальным многообразием. Отнесем пространство P_3 к реперу $R \equiv \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Уравнение квадрики Q и систему пфаффовых уравнений комплекса можно привести к виду: $F \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0$,

$$\left.\begin{aligned} &\omega_1^0 - \omega_3^2 = b_{1i}\omega^i, \quad \omega_2^0 - \omega_3^1 = b_{2i}\omega^i, \quad \omega_0^3 = a_{0i}\omega^i, \\ &-\omega_1^2 = a_{1i}\omega^i; \ -\omega_2^1 = a_{2i}\omega^i, \quad \omega_3^0 = a_{3i}\omega^i, \quad (i = 0,1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.1)$$

где $\omega^0 \equiv \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3$, $\omega^1 \equiv \omega_2^3 - \omega_0^1$, $\omega^2 \equiv \omega_1^3 - \omega_0^2$.

Фокальное многообразие квадрики Q (см. [2])

$$\left.\begin{aligned} &F_0 \equiv \tfrac{1}{2} x^1 x^2 + \tfrac{1}{2} x^0 x^3 + a_{\alpha 0}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 0} x^\tau x^3 = 0, \\ &F_1 \equiv x^0 x^2 + a_{\alpha 1}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 1} x^\tau x^3 = 0, \\ &F_2 \equiv x^0 x^1 + a_{\alpha 2}(x^\alpha)^2 + b_{\tau 2} x^\tau x^3 = 0, \\ &F \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0 \qquad (\alpha = 0,1,2,3; \ \tau = 1,2) \end{aligned}\right\} \quad (1.2)$$

в общем случае является пустым множеством.

О п р е д е л е н и е 1.1. Комплексом K_1 называется комплекс K, текущая квадрика Q которого обладает одной фокальной точкой.