ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.12 1981

Ю.И.Попов, М.Ф.Косаренко

О ПОЛЯХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСЫ $H_{n-2}\subset P_n$

Проективная теория регулярной гиперполосы $H_{n-2}\subset P_n$ изучалась ранее М.А.Василяном [1]-[2]. М.А.Василян [1] строит внутренний репер регулярной гиперполосы ее образующего элемента и дает геометрическую интерпретацию построенного репера, в работе [2] он решает аналогичную задачу для квадратичных регулярных гиперполос H_{n-2}.

В данной работе инвариантным методом продолжений и охватов Г.Ф.Лаптева [3] строятся поля фундаментальных геометрических объектов регулярной гиперполосы $H_{n-2}\subset P_n$, с помощью которых удается присоединить внутренним инвариантным образом точечный репер $\{M_\mathcal{J}\}$ и тангенциальный репер $\{\sigma^\mathcal{K}\}$ в окрестности третьего порядка образующего элемента данной гиперполосы.

Обозначения и замечания:

а/ во всей работе используется следующая схема индексов:

$$i,j,k,\ldots=1,2,\ldots,n-2;\quad \mathcal{I},\mathcal{J},\mathcal{K},\ldots=0,1,2,\ldots,n;$$

б/ оператор ∇_d дифференцирования действует по закону:

$$\nabla_d T^k_{n-1,i}=dT^k_{n-1,i}-T^k_{n-1,i}\,\omega^{n-1}_{n-1}-T^k_{n-1,s}\,\omega^s_i+T^s_{n-1,i}\,\omega^k_s;$$

в/ символом δ обозначаем дифференцирование по вторичным параметрам, а значение форм $\omega^\mathcal{K}_\mathcal{J}$ при фиксированных параметрах через $\pi^\mathcal{K}_\mathcal{J}$. В этом случае оператор обозначается символом ∇_δ.

1. Известно [1], что в репере 1-го порядка дифференциальные уравнения регулярной гиперполосы $H_{n-2}\subset P_n$ записываются в виде:

$$\omega^n_0=0,\quad \omega^n_{n-1}=0,\quad \omega^{n-1}_0=0, \tag{1}$$

$$\omega^n_i=a_{ij}\omega^j,\ \nabla a_{ij}+a_{ij}(\omega^0_0+\omega^n_n)=a_{ijk}\omega^k, \tag{2}$$

$$\omega^{n-1}_i=\lambda^{n-1}_{ij}\omega^j,\ \nabla\lambda^{n-1}_{ij}=-\lambda_{ij}\omega^0_0-a_{ij}\omega^{n-1}_n+\lambda^{n-1}_{ijk}\omega^k, \tag{3}$$

$$\omega^i_{n-1}=\lambda^{ij}_{n-1}\omega^n_j,\ \nabla\lambda^{ij}_{n-1}=\lambda^{ij}_{n-1}\omega^n_n+a^{ij}\omega^0_{n-1}-\lambda^{ijk}_{n-1}\omega^n_k, \tag{4}$$

где $a_{ijk},\lambda^{n-1}_{ijk},\lambda^{ijk}_{n-1}$ -симметричны по индексам i,j,k. Симметрический двухвалентный тензор a_{ij} -основной фундаментальный тензор 1-го порядка гиперполосы $H_{n-2}\subset P_n$. Обозначим через a^{ij} обратный фундаментальный тензор 1-го порядка гиперполосы H_{n-2}:

$$a_{ij}a^{jk}=\delta^k_i,\ \nabla a^{ik}=a^{ik}(\omega^0_0+\omega^n_n)-a^{ijk}\omega^n_k. \tag{5}$$

Системы величин

$$\Gamma_2=\{a_{ij},\lambda^{n-1}_{ij},\lambda^{ij}_{n-1}\},\ \Gamma_3=\{\Gamma_2,a_{ijk},\lambda^{n-1}_{ijk},\lambda^{ijk}_{n-1}\}$$

образуют фундаментальные объекты соответственно второго и третьего порядков гиперполосы H_{n-2}. Дальнейшее их продолжение вводит геометрические объекты четвертого и более высоких порядков, определяемые гиперполосой H_{n-2}. Полученная таким образом последовательность геометрических объектов называется фундаментальной последовательностью гиперполосы H_{n-2}.

2. Внутренние инвариантные реперы $\{M_\mathcal{J}\}$ и $\{\sigma^\mathcal{K}\}$ будем искать в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&M_0=A_0, && \sigma^0=\tau^0-x_i\tau^i-x_{n-1}\tau^{n-1}+y_n\tau^n,\\
&M_i=A_i+x_iA_0, && \sigma^i=\tau^i+y^i\tau^n,\\
&M_{n-1}=A_{n-1}+x_{n-1}A_0, && \sigma^{n-1}=\tau^{n-1}+y^{n-1}\tau^n,\\
&M_n=A_n-y^{n-1}A_{n-1}-y^iA_i+x^0A_0 && \sigma^n=\tau^n.
\end{aligned} \tag{6}$$

где оснащающие объекты $x_{n-1}, y^{n-1}, \{x_i\}, \{y^i\}, \{x_{n-1}, x_i, y_n\}, \{y^{n-1}, y^i, x^0\}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям:

$$\nabla_\delta x_{n-1} = -x_{n-1}\pi^0_0 - \pi^0_{n-1} \quad (7); \quad \nabla_\delta y^{n-1} = y^{n-1}\pi^n_n + \pi^{n-1}_n, \tag{8}$$

$$\nabla_\delta x_i = -x_i\pi^0_0 - \pi^0_i \quad (9); \quad \nabla_\delta y^i = y^i\pi^n_n + \pi^i_n, \tag{10}$$

$$\nabla_\delta x^0 = x^0(\pi^n_n - \pi^0_0) + y^i\pi^0_i + y^{n-1}\pi^0_{n-1} - \pi^0_n, \tag{11}$$

$$\nabla_\delta y_n = y_n(\pi^n_n - \pi^0_0) - x_i\pi^i_n - x_{n-1}\pi^{n-1}_n + \pi^0_n. \tag{12}$$

Кроме того, оснащающие объекты связаны соотношением

$$x^0 + y_n + x_i y^i + x_{n-1}y^{n-1} = 0, \tag{13}$$

полученным из условия инцидентности точки M_n и гиперплоскости σ^0 : $(M_n, \sigma^0) = 0$.

Охваты оснащающих объектов x_{n-1} и y^{n-1} построим в окрестности второго порядка, а охваты оснащающих объектов x_i и y^i - в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы H_{n-2} также, как и в работе [1]:

$$x_{n-1} = -\Lambda_{n-1}; \; \Lambda_{n-1} = \frac{1}{n-2} a_{ij}\lambda^{ij}_{n-1} \quad \text{, где} \tag{14}$$

$$\nabla\Lambda_{n-1} = -\Lambda_{n-1}\omega^0_0 + \omega^0_{n-1} - \lambda^i_{n-1}\omega^n_i; \tag{15}$$

$$y^{n-1} = -\Lambda^{n-1}; \; \Lambda^{n-1} = \frac{1}{n-2} a^{ij}\lambda^{n-1}_{ij} \quad \text{, где} \tag{16}$$

$$\nabla\Lambda^{n-1} = \Lambda^{n-1}\omega^n_n - \omega^{n-1}_n + \lambda^{n-1}_i\omega^i; \tag{17}$$

$$x_i = -\lambda_i, \; \lambda_i = c_{ij}\lambda^j_{n-1}, \quad c^{ij} = \lambda^{ij}_{n-1} - \lambda_{n-1}a^{ij}, \tag{18}$$

$$y^i = -\lambda^i, \; \lambda^i = b^{ij}\lambda^{n-1}_j, \; b_{ij} = \lambda^{n-1}_{ij} - \lambda^{n-1}a_{ij}, \tag{19}$$

где c^{ij} и b_{ij} невырожденные тензоры, а c_{ij} и b^{ij} -обратные им тензоры второго порядка.

Другой способ построения охватов объектов x_i, y^i состоит в следующем [4]. Строим последовательно Чебышевские векторы 1-го и 2-го рода и тензоры Дарбу:

$$t_i = \frac{1}{n} a_{ijk}a^{jk}, \quad \nabla t_i + t_i\omega^0_0 - a_{ik}\omega^k_n + \omega^0_i = t_{ij}\omega^j; \tag{20}$$

$$t^i = \frac{1}{n} a^{ijk}a_{jk}, \quad \nabla t^i = t^i\omega^n_n - a^{ij}\omega^0_j + \omega^i_n - t^{ij}\omega^n_j; \tag{21}$$

$$l_{ijk} = a_{ijk} - a_{(ij}t_{k)}, \quad l^{ijk} = a^{ijk} - a^{(ij}t^{k)}, \tag{22}$$

$$l_0 = l_{ijk}l^{ijk}; \quad d\ln l_0 = \omega^n_n - \omega^0_0 + l_i\omega^i, \tag{23}$$

$$d\ln l_0 = \omega^n_n - \omega^0_0 - l^i\omega^n_i. \tag{24}$$

Наконец, определяем первую пару нормальных квазитензоров третьего порядка Λ_i и Λ^i, охватывающих оснащающие геометрические объекты x_i и x^i :

$$x_i = -\Lambda_i, \; \Lambda_i = -\frac{1}{2}(t_i + l_i); \; \nabla_\delta\Lambda_i = -\Lambda_i\omega^0_0 + \omega^0_i + \Lambda_{ij}\omega^j, \tag{25}$$

$$y^i = -\Lambda^i, \; \Lambda^i = -\frac{1}{2}(t^i + l^i); \; \nabla\Lambda^i = \Lambda^i\omega^n_n - \omega^i_n - \Lambda^{ij}\omega^n_j. \tag{26}$$

3. Построим поля геометрических объектов регулярной гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$ в окрестности второго порядка ее образующего элемента. Последовательно находим тензоры второго порядка:

$$l^i_{n-1,j} = c^{ik}_{n-1}a_{kj}; \; \nabla_\delta l^i_{n-1,j} = -l^i_{n-1,j}\pi^0_0; \tag{27}$$

$$l^{n-1,j}_i = c^{n-1}_{ik}a^{kj}, \; \nabla_\delta l^{n-1,j}_i = l^{n-1,j}_i\pi^n_n; \tag{28}$$

$$l^{n-1}_{n-1} = \frac{1}{n-2} l^{ij}_{n-1}l^{n-1}_{ij}, \; \nabla_\delta l^{n-1}_{n-1} = l^{n-1}_{n-1}(\pi^n_n - \pi^0_0); \tag{29}$$

$$\nabla_\delta l_{n-1,n-1} = -2l_{n-1,n-1}\pi^0_0, \; l^{n-1}_{n-1}\tilde{l}^{n-1}_{n-1} = 1, \tag{30}$$

$$\mathcal{L}_{n-1,n-1} = \tilde{l}^{n-1}_{n-1}l_{n-1,n-1}, \; \nabla_\delta\mathcal{L}_{n-1,n-1} = -\mathcal{L}_{n-1,n-1}(\pi^0_0 + \pi^n_n). \tag{31}$$

Затем строим квазитензор $\{\mathcal{L}_{n-1,n-1}, l_{n-1}\}$ второго порядка, где

$$l_{n-1} = -(\mathcal{L}_{n-1,n-1}\Lambda^{n-1} + \Lambda_{n-1}), \tag{32}$$

$$\nabla_\delta \ell_{n-1} = -\ell_{n-1}\pi^0_0 + \mathcal{L}_{n-1,n-1}\pi^{n-1}_n - \pi^0_{n-1}. \quad (33)$$

Далее положим

$$\lambda_i = a^{jl} a^{kp} \ell_{lpi} C^{n-1}_{jk} \Lambda_{n-1}, \quad (34)$$

$$\eta_i = \ell_{ijk} C^{jk}_{n-1} \Lambda^{n-1}, \quad (35)$$

$$\nabla_\delta \lambda_i = -\lambda_i (2\pi^0_0 - \pi^n_n) + a^{jl} a^{kp} \ell_{lpi} \ell^{n-1}_{jk} \pi^0_{n-1}, \quad (36)$$

$$\nabla_\delta \eta_i = -\eta_i (2\pi^0_0 - \pi^n_n) - \ell_{jki} C^{jk}_{n-1} \pi^{n-1}_{n-1}. \quad (37)$$

Используя тензор Дарбу ℓ_{ijk} , строим симметрический тензор второго порядка

$$\mathcal{L}_{ij} = a^{kl} a^{sp} \ell_{iks} \ell_{jlp}, \ \nabla \mathcal{L}_{ij} = -2\mathcal{L}_{ij}\omega^0_0 + \mathcal{L}_{ijk}\omega^k, \quad (38)$$

который в общем виде является невырожденным, т.е. существует взаимный ему тензор $\mathcal{L}^{ij}$:

$$\mathcal{L}^{ik}\mathcal{L}_{kj} = \delta^i_j, \quad \nabla \mathcal{L}^{ij} = 2\mathcal{L}^{ij}\omega^0_0 + \mathcal{L}^{ij}_k \omega^k. \quad (39)$$

4. Следуя работе [5], построим поля геометрических объектов, связанных с третьей дифференциальной окрестностью образующего элемента регулярной гиперполосы H_{n-2}. При помощи величин t_{ij}, t^{ij} третьего порядка и уже построенных ранее величин второго порядка последовательно определяем новые величины третьего порядка $T, \overline{T}, T_0, \hat{T}_{ij}, \hat{T}_i, T^i, T_i$:

$$T = \frac{1}{n-2}(t_{ij} - t_i t_j) a^{ij} \quad (40); \quad \overline{T} = \frac{1}{n-2}(t^{ij} - t^i t^j) a_{ij}, \quad (41)$$

$$T_0 = T - \Lambda^{n-1}\ell_{n-1}, \quad (42); \quad \hat{T}_{ij} = t_{ij} - t_i t_j - T_0 a_{ij}, \quad (43)$$

$$\hat{T}_i = a^{jk} a^{lp} \hat{T}_{jl} \ell_{kpi} + (\lambda_i - \eta_i), \quad (44)$$

$$T^i = \mathcal{L}^{ij} \hat{T}_j, \ \nabla T^i = T^i \omega^n_n + \omega^i_n + T^i_k \omega^k; \quad (45)$$

$$T_i = t_i - a_{ij} T^j, \ \nabla T_i = -T_i \omega^0_0 - \omega^0_i + T_{ij}\omega^j. \quad (46)$$

Из уравнений (45) и (46) следует, что величины T_i и T^i образуют вторую пару нормальных квазитензоров гиперполосы $H_{n-2} \subset P_n$.

5. Перейдем к построению геометрических объектов, определяющих инвариантную точку M_n и гиперплоскость σ^0, внутренним образом присоединенных к регулярной гиперполосе H_{n-2} . Уравнения (11)–(13), которым удовлетворяют объекты x^0 и y_n, теперь принимают вид:

$$x^0 + y_n + \Lambda_i \Lambda^i + \Lambda_{n-1}\Lambda^{n-1} = 0, \quad (47)$$

$$\delta x^0 = x^0(\pi^n_n - \pi^0_0) - \Lambda^i \pi^0_i - \Lambda^{n-1}\pi^0_{n-1} - \pi^0_n, \quad (48)$$

$$\delta y_n = y_n(\pi^n_n - \pi^0_0) + \Lambda_i \pi^i_n + \Lambda_{n-1}\pi^{n-1}_n + \pi^0_n. \quad (49)$$

Строим величины

$$\Lambda^0 = \frac{\alpha \tilde{X} + \beta \overline{X}}{\alpha + \beta}, \quad \Lambda_n = \frac{\alpha \tilde{Y} + \beta \overline{Y}}{\alpha + \beta}, \quad (50)$$

где

$$\tilde{X} = \frac{1}{2}(\Lambda + T + a_{ij}\Lambda^i\Lambda^j) + \Lambda^i t_i; \ \tilde{Y} = -(\tilde{X} + \Lambda_i\Lambda^i + \Lambda_{n-1}\Lambda^{n-1}),$$

$$\overline{X} = -(\overline{Y} + \Lambda_i\Lambda^i + \Lambda_{n-1}\Lambda^{n-1}), \ \overline{Y} = \frac{1}{2}(\Lambda + \overline{T} + a^{ij}\Lambda_i\Lambda_j) + \Lambda_i t^i,$$

где $\alpha \neq -\beta; \ \alpha \neq 0 \vee \beta \neq 0$,

α и β произвольные действительные числа. Легко проверить, что Λ^0 и Λ_n удовлетворяют соответственно уравнениям (48), (49). Таким образом, точка

$$M_n = A_n + \Lambda^i A_i + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^0 A_0 \quad (51)$$

и гиперплоскость

$$\sigma^0 = \tau^0 + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1}\tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n \quad (52)$$

внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы H_{n-2}, двойственны друг другу и, кроме того, удовлетворяют условию инцидентности (47).

Построение величин Λ° и Λ_n можно осуществить и с помощью второй пары нормальных квазитензоров T_i и T^i.

Итак, построенные инвариантные точечный и тангенциальный реперы, присоединенные внутренним образом в окрестности третьего порядка образующего элемента гиперполосы H_{n-2}, имеют следующий вид:

$$M_o = A_o, \qquad \sigma^\circ = \tau^\circ + \Lambda_i \tau^i + \Lambda_{n-1}\tau^{n-1} + \Lambda_n \tau^n,$$
$$M_i = A_i - A_i A_o, \qquad \sigma^i = \tau^i - \Lambda^i \tau^n,$$
$$M_{n-1} = A_{n-1} - \Lambda_{n-1} A_o, \qquad \sigma^{n-1} = \tau^{n-1} - \Lambda^{n-1}\tau^n, \tag{53}$$
$$M_n = A_n + \Lambda^{n-1} A_{n-1} + \Lambda^i A_i + \Lambda^\circ A_o, \qquad \sigma^n = \tau^n.$$

Список литературы

1. В а с и л я н М.А. Об инвариантном оснащении гиперполосы. ДАН Арм.ССР.Матем., 1970, т.50, №2, с.65-70.

2. В а с и л я н М.А. Квадратичные гиперполосы ранга $n-2$ в проективном пространстве P_n. ДАН Арм.ССР.Матем., 1970, т.50, №4, с.193-197.

3. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр.Моск.матем.об-ва, 1953, т.2, с.275-382.

4. В а с и л я н М.А. Проективная теория многомерных гиперполос. ДАН Арм.ССР.Матем., 1971, т.6, №6, с.477-481.

5. С т о л я р о в А.В. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы. Изв.высш.учебн.заведений.Матем., 1975, №10, с.97-99.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.12 1981

И.А. С а у т к и н а

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПОЛУКВАДРАТИЧНЫХ ПАР ФИГУР В P_3

В трехмерном проективном пространстве исследуются пары V, образованные конгруэнцией (Q) квадрик Q и поверхностью (P), описанной точкой P, не инцидентной квадрике Q. В работе подробно рассмотрены пары V_1, выделенные из пар V заданием двух прямых характеристического многообразия конгруэнции (Q) ранга один [1].

§ 1. Система пфаффовых уравнений пары V

Канонический репер $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ пары V строим следующим образом: вершину A_4 репера совмещаем с точкой P, вершину A_3 помещаем в характеристическую точку поляры $\mathcal{L}$ точки A_4 относительно квадрики Q, вершины A_1 и A_2 – в точки пересечения поляры точки A_3 относительно коники C, которая инцидентна квадрике Q и поляре $\mathcal{L}$ точки A_4 относительно Q с коникой C.

Относительно построенного репера уравнение квадрики Q имеет вид:

$$(x^3)^2 + (x^4)^2 - 2x^1 x^2 = 0. \tag{1}$$

Деривационные формулы репера R запишутся в виде:

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta, \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, 4,$$

где формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta,$$