$$(Q \overset{1}{\bullet} R(X,Y))(A,B) = Q(R(X,Y)A,B),$$

$$(Q \overset{2}{\bullet} R(X,Y))(A,B) = Q(A,R(X,Y)B).$$

Список литературы

Монахова О.А. Вертикальные лифты тензорных полей типа (1,1) // Движения в обобщенных пространствах. Пенза, 2000.

O. Monakhova

HORIZONTAL LIFT OF LINEAR CONNECTION ON THE BUNDLE OF THE TENSORS OF THE TYPE (0,2)

On the bundle of the tensors of the type (0,2) horizontal lift of linear connection is got.

УДК 514.76

О.М. Омельян

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ОБЪЕКТ КРИВИЗНЫ ГРУППОВОЙ СВЯЗНОСТИ НА РАСПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОСКОСТЕЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ КАРТАНА

Рассмотрено каноническое пространство проективной связности Картана со структурными уравнениями, которые обобщают соответствующие уравнения пространства аффинной связности. В пространстве проективной связности исследуется распределение плоскостей. Это распределение порождает ряд подтензоров тензора кручения-кривизны. Показано, что объект кривизны групповой связности в главном расслоении, ассоциированном с распределением плоскостей, является тензором лишь в совокупности с некоторым тензором, при обращении которого в нуль объект кривизны самостоятельно образует тензор.

1. Тензор кручения-кривизны пространства $P_{n,n}$ и его подтензоры. Рассмотрим пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ со структурными уравнениями [1; 2], которые обобщают соответствующие уравнения проективного пространства

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J + S^I_{JK}\omega^J \wedge \omega^K,$$
$$D\omega^I_J = \omega^K_J \wedge \omega^I_K + \delta^I_J \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I + \Re^I_{JKL}\omega^K \wedge \omega^L,$$
$$D\omega_I = \omega^J_I \wedge \omega_J + \Re_{IJK}\,\omega^J \wedge \omega^K \qquad (I, J, K, ... = \overline{1, n}),$$

причем компоненты объекта кручения-кривизны $\Re = \{S^I_{JK}, \Re^I_{JKL}, \Re_{IJK}\}$ пространства $P_{n,n}$ антисимметричны по двум последним нижним индексам:

$$S^I_{(JK)} = 0,\ \Re^I_{J(KL)} = 0,\ \Re_{I(JK)} = 0. \tag{2}$$

Пространство проективной связности Картана $P_{n,n}$ без кручения-кривизны ($\Re = 0$) локально является n-мерным проективным пространством P_n. Найдем общий вид дифференциальных сравнений на компоненты объекта $\Re$, исходя из структурных уравнений (1). Продифференцируем их внешним образом:

$$\Delta S^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0,\ \square\Re^I_{JKL} \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0,\ \square\Re_{IJK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0; \tag{3}$$

$$\square\Re^I_{JKL} \equiv \Delta\Re^I_{JKL} - \delta^I_J S^M_{KL}\omega_M - S^I_{KL}\omega_J,\ \square\Re_{IJK} \equiv \Delta\Re_{IJK} + \Re^L_{IJK}\omega_L, \tag{4}$$

где символ «≡» означает сравнение по модулю базисных форм ω^I, а дифференциальный оператор Δ действует следующим образом:

$$\Delta\Re^I_{JKL} = d\Re^I_{JKL} + \Re^M_{JKL}\omega^I_M - \Re^I_{MKL}\omega^M_J - \Re^I_{JML}\omega^M_K - \Re^I_{JKM}\omega^M_L.$$

Разрешим кубичные уравнения (3) по лемме Лаптева

$$\Delta S^I_{JK} \wedge \omega^K = \omega^K \wedge \Theta^I_{JK},\ \square\Re^{\,I}_{\ JKL} \wedge \omega^L = \omega^L \wedge \Theta^I_{JKL},$$
$$\square\Re_{\,IJK} \wedge \omega^K = \omega^K \wedge \Theta_{IJK}, \tag{5}$$

причем выполняются условия

$$\Theta^I_{JK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0,\ \Theta^I_{JKL} \wedge \omega^K \wedge \omega^L = 0,\ \Theta_{IJK} \wedge \omega^J \wedge \omega^K = 0. \tag{6}$$

Для их выполнения достаточно симметрии форм $\Theta^I_{JK}, \Theta^I_{JKL}$, Θ_{IJK} по двум нижним индексам

$$\Theta^I_{[JK]} = 0,\ \Theta^I_{J[KL]} = 0,\ \Theta_{I[JK]} = 0. \tag{7}$$

В уравнениях (5) соберем члены в левых частях, вынесем базисные формы, разрешим полученные квадратичные уравнения по лемме Картана и запишем результат в виде сравнений

$$\Delta S^I_{JK} + \Theta^I_{JK} \equiv 0,\ \square\Re^{\,I}_{\ JKL} + \Theta^I_{JKL} \equiv 0,\ \square\Re_{\,IJK} + \Theta_{IJK} \equiv 0. \tag{8}$$

В силу условий (2) выражения (4) антисимметричны по двум индексам, поэтому естественно предполагать такими же формы $\Theta^I_{JK}, \Theta^I_{JKL}, \Theta_{IJK}$ с точностью до базисных форм, т. е.

$$\Theta^I_{(JK)} \equiv 0,\ \Theta^I_{J(KL)} \equiv 0,\ \Theta_{I(JK)} \equiv 0. \tag{9}$$

Условия (7) и (9) согласуются лишь в каноническом случае: $\Theta^I_{JK} = 0,\ \Theta^I_{JKL} = 0,\ \Theta_{IJK} = 0$, в котором сравнения (8) принимают простейший вид: $\Delta S^I_{JK} \equiv 0,\ \square\Re^{\,I}_{\ JKL} \equiv 0,\ \square\Re_{\,IJK} \equiv 0.$ Пользуясь выражениями (4), получим [2]

$$\Delta S^I_{JK} \equiv 0,\ \Delta\Re^{\,I}_{\ JKL} - \delta^I_J S^M_{KL}\omega_M - S^I_{KL}\omega_J \equiv 0,\ \Delta\Re_{\,IJK} + \Re^{\,L}_{\ IJK}\omega_L \equiv 0. \tag{10}$$

Утверждение. *В каноническом случае объект проективного кручения-кривизны* $\Re$ *образует тензор, компоненты которого удовлетворяют дифференциальным сравнениям* (10). *Тензор* $\Re$ *содержит простой подтензор аффинного кручения-кривизны* $\Re_A = \{S^I_{JK}, \Re^{\,I}_{\ JKL}\}$ [2] *и простейший подтензор кручения* $S = \{S^I_{JK}\}$.

В пространстве $P_{n,n}$ будем рассматривать распределение m-плоскостей NS_n:

$$\omega_i^a = \Lambda_{iJ}^a \omega^J \quad (i, j, k = \overline{1, m}\,;\, a, b, c = \overline{m+1, n}); \tag{11}$$

$$\Delta\Lambda_{iJ}^a - \delta_J^a \omega_i = \Lambda_{iJK}^a \omega^K,$$

$$\Delta\Lambda_{ijK}^a + \Lambda_{ij}^b \omega_{bK}^a - \Lambda_{kj}^a \omega_{iK}^k + \Lambda_{iK}^a \omega_j + \Lambda_{ij}^a \omega_K + \Lambda_{jK}^a \omega_i \equiv 0,$$

$$\Delta\Lambda_{ibK}^a - \Lambda_{ijK}^a \omega_b^j + \Lambda_{ib}^c \omega_{cK}^a - \Lambda_{jb}^a \omega_{iK}^j + \Lambda_{iK}^a \omega_b + \Lambda_{ib}^a \omega_K - \delta_b^a \omega_{iK} \equiv 0;$$

тогда из структурных уравнений (1) имеем

$$\begin{aligned}
D\omega^i &= \omega^j \wedge \omega_j^i + \omega^a \wedge \omega_a^i + S_{jk}^i \omega^j \wedge \omega^k + 2S_{ja}^i \omega^j \wedge \omega^a + S_{ab}^i \omega^a \wedge \omega^b, \\
D\omega^a &= \omega^b \wedge \omega_b^a + (\Lambda_{ij}^a + S_{ij}^a)\omega^i \wedge \omega^j + (\Lambda_{ib}^a + 2S_{ib}^a)\omega^i \wedge \omega^b + S_{bc}^a \omega^b \wedge \omega^c, \\
D\omega_j^i &= \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i + \omega^a \wedge \omega_{ja}^i + \Re^i_{jkl}\, \omega^k \wedge \omega^l + 2\Re^i_{jka}\, \omega^k \wedge \omega^a + \\
&\quad + \Re^i_{jab}\, \omega^a \wedge \omega^b, \\
D\omega_j &= \omega_j^k \wedge \omega_k + \omega^j \wedge \omega_{ij} + \omega^a \wedge \omega_{ia} + \Re_{ijk}\, \omega^j \wedge \omega^k + 2\Re_{ija}\, \omega^j \wedge \omega^a + \\
&\quad + \Re_{iab}\, \omega^a \wedge \omega^b, \qquad\qquad (13) \\
D\omega_b^a &= \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a + \omega^c \wedge \omega_{bc}^a + \Re^a_{bij}\, \omega^i \wedge \omega^j + 2\Re^a_{bic}\, \omega^i \wedge \omega^c + \\
&\quad + \Re^a_{bcd}\, \omega^c \wedge \omega^d, \\
D\omega_a^i &= \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^k \wedge \omega_{ak}^i + \Re^i_{ajk}\, \omega^j \wedge \omega^k + 2\Re^i_{ajb}\, \omega^j \wedge \omega^b + \\
&\quad + \Re^i_{abc}\, \omega^b \wedge \omega^c, \\
D\omega_a &= \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b + \Re_{aij}\, \omega^i \wedge \omega^j + 2\Re_{aib}\, \omega^i \wedge \omega^b + \\
&\quad + \Re_{abc}\, \omega^b \wedge \omega^c,
\end{aligned}$$

где трехиндексные формы выражаются по формулам

$$\begin{aligned}
&\omega_{jk}^i = \Lambda_{jk}^a \omega_a^i - \delta_j^i \omega_k - \delta_k^i \omega_j,\ \omega_{ja}^i = \Lambda_{ja}^b \omega_b^i - \delta_j^i \omega_a,\ \omega_{bi}^a = -\Lambda_{ji}^a \omega_b^j - \delta_b^a \omega_i, \\
&\omega_{bc}^a = -\Lambda_{ic}^a \omega_b^i - \delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b,\ \omega_{ak}^i = -\delta_k^i \omega_a,\ \omega_{ij} = \Lambda_{ij}^a \omega_a,\ \omega_{ia} = \Lambda_{ia}^b \omega_b.
\end{aligned} \tag{14}$$

Сравнения (10) на компоненты объекта кручения-кривизны объемлющего пространства $P_{n,n}$, в котором задано распределение NS_n, принимают вид

$$\begin{cases}\Delta S^i_{jk}+S^a_{jk}\omega^i_a\equiv 0, \ \ \Delta S^i_{ja}+S^b_{ja}\omega^i_b-S^i_{jk}\omega^k_a\equiv 0,\\ \Delta S^i_{ab}+S^c_{ab}\omega^i_c-S^i_{jb}\omega^j_a+S^i_{ja}\omega^j_b\equiv 0,\\ \Delta S^a_{ij}\equiv 0, \ \ \Delta S^a_{ib}-S^a_{ij}\omega^j_b\equiv 0, \ \ \Delta S^a_{bc}-S^a_{ic}\omega^i_b+S^a_{ib}\omega^i_c\equiv 0;\end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{ijk}-S^a_{jk}\omega_i\equiv 0, \ \ \Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{ijb}-\mathfrak{R}^{\ a}_{ijk}\omega^k_b-S^a_{jb}\omega_i\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{ibc}-\mathfrak{R}^{\ a}_{ijc}\omega^j_b+\mathfrak{R}^{\ a}_{ijb}\omega^j_c-S^a_{bc}\omega_i\equiv 0;\end{cases} \tag{16}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{jkl}+\mathfrak{R}^{\ a}_{jkl}\omega^i_a-\delta^i_j(S^m_{kl}\omega_m+S^a_{kl}\omega_a)-S^i_{kl}\omega_j\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{jka}+\mathfrak{R}^{\ b}_{jka}\omega^i_b-\mathfrak{R}^{\ i}_{jkl}\omega^l_a-\delta^i_j(S^l_{ka}\omega_l+S^b_{ka}\omega_b)-S^i_{ka}\omega_j\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{jab}+\mathfrak{R}^{\ c}_{jab}\omega^i_c-\mathfrak{R}^{\ i}_{jkb}\omega^k_a+\mathfrak{R}^{\ i}_{jka}\omega^k_b-\delta^i_j(S^k_{ab}\omega_k+S^c_{ab}\omega_c)-S^i_{ab}\omega_j\equiv 0;\end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}_{ijk}+\mathfrak{R}^{\ l}_{ijk}\omega_l+\mathfrak{R}^{\ a}_{ijk}\omega_a\equiv 0, \ \ \Delta\mathfrak{R}_{ija}-\mathfrak{R}_{ijk}\omega^k_a+\mathfrak{R}^{\ k}_{ija}\omega_k+\mathfrak{R}^{\ b}_{ija}\omega_b\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}_{iab}-\mathfrak{R}_{ijb}\omega^j_a+\mathfrak{R}_{ija}\omega^j_b+\mathfrak{R}^{\ j}_{iab}\omega_j+\mathfrak{R}^{\ c}_{iab}\omega_c\equiv 0;\end{cases} \tag{18}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{bij}-\mathfrak{R}^{\ a}_{kij}\omega^k_b-\delta^a_b(S^k_{ij}\omega_k+S^c_{ij}\omega_c)-S^a_{ij}\omega_b\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{bic}-\mathfrak{R}^{\ a}_{jic}\omega^j_b-\mathfrak{R}^{\ a}_{bij}\omega^j_c-\delta^a_b(S^j_{ic}\omega_j+S^d_{ic}\omega_d)-S^a_{ic}\omega_b\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ a}_{bcd}-\mathfrak{R}^{\ a}_{icd}\omega^i_b-\mathfrak{R}^{\ a}_{bid}\omega^i_c+\mathfrak{R}^{\ a}_{bic}\omega^i_d-\delta^i_j(S^k_{ab}\omega_k+S^c_{ab}\omega_c)-S^i_{ab}\omega_j\equiv 0;\end{cases} \tag{19}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{ajk}+\mathfrak{R}^{\ b}_{ajk}\omega^i_b-\mathfrak{R}^{\ i}_{ljk}\omega^l_a-S^i_{jk}\omega_a\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{ajb}+\mathfrak{R}^{\ c}_{ajb}\omega^i_c-\mathfrak{R}^{\ i}_{kjb}\omega^k_a-\mathfrak{R}^{\ i}_{ajk}\omega^k_b-S^i_{jb}\omega_a\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}^{\ i}_{abc}+\mathfrak{R}^{\ d}_{abc}\omega^i_d-\mathfrak{R}^{\ i}_{jbc}\omega^j_a-\mathfrak{R}^{\ i}_{ajc}\omega^j_b+\mathfrak{R}^{\ i}_{ajb}\omega^j_c-S^i_{bc}\omega_a\equiv 0;\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases}\Delta\mathfrak{R}_{ajk}-\mathfrak{R}_{ljk}\omega^l_a+\mathfrak{R}^{\ l}_{ajk}\omega_l+\mathfrak{R}^{\ b}_{ajk}\omega_b\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}_{ajb}-\mathfrak{R}_{kjb}\omega^k_a-\mathfrak{R}_{ajk}\omega^k_b+\mathfrak{R}^{\ k}_{ajb}\omega_k+\mathfrak{R}^{\ c}_{ajb}\omega_c\equiv 0,\\ \Delta\mathfrak{R}_{abc}-\mathfrak{R}_{ibc}\omega^i_a-\mathfrak{R}_{aic}\omega^i_b+\mathfrak{R}_{aib}\omega^i_c+\mathfrak{R}^{\ i}_{abc}\omega_i+\mathfrak{R}^{\ d}_{abc}\omega_d\equiv 0.\end{cases} \tag{21}$$

Уравнения (13) являются структурными уравнениями главного расслоения $G(NS_n)$, ассоциированного с распределением NS_n, причем базой этого расслоения является само распределение, а типовым слоем — подгруппа стационарности $G\subset GP(n)$ центрированной плоскости P^*_m в соответствующем слое. В этом расслоении выделяется 4 фактор-расслоения (ср. [3]). Из сравнений (15—21) следует

Теорема 1. *Тензор кручения-кривизны* $\mathfrak{R}$ *в пространстве проективной связности Картана, в котором задано распределение* NS_n, *содержит ряд подтензоров: 1 простейший подтензор кручения* $\{S^a_{ij}\}$ *и несколько простых подтензоров, из которых отметим следующие:* $S_1=\{S^a_{ij}, S^a_{ib}\}$, $S_2=\{S^a_{ij}, S^a_{ib}, S^i_{jk}, S^i_{ja}\}$, $S_3=\{S^a_{ij}, S^a_{ib}, S^a_{bc}\}$, $\{S, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}\}$, $\{S, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}, \mathfrak{R}^i_{jkl}, \mathfrak{R}^i_{jka}, \mathfrak{R}^i_{jab}\}$, $\{S, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}, \mathfrak{R}^a_{bij}, \mathfrak{R}^a_{bic}, \mathfrak{R}^a_{bcd}\}$, $\{S, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}, \mathfrak{R}^i_{jkl}, \mathfrak{R}^i_{jka}, \mathfrak{R}^i_{jab}, \mathfrak{R}^a_{bij}, \mathfrak{R}^a_{bic}, \mathfrak{R}^a_{bcd}, \mathfrak{R}^i_{ajk}, \mathfrak{R}^i_{ajb}, \mathfrak{R}^i_{abc}\}$, $\{S, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}, \mathfrak{R}^i_{jkl}, \mathfrak{R}^i_{jka}, \mathfrak{R}^i_{jab}, \mathfrak{R}_{ijk}, \mathfrak{R}_{ija}, \mathfrak{R}_{iab}\}$, $\{S_3, \mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^i_{jkl}, \mathfrak{R}^i_{jka}, \mathfrak{R}^a_{bij}, \mathfrak{R}^a_{bic}, \mathfrak{R}_{ijk}, \mathfrak{R}_{ija}, \mathfrak{R}_{ajk}, \mathfrak{R}_{ajb}\}$.

Замечание 1. Компоненты $\mathfrak{R}^a_{ijk}, \mathfrak{R}^a_{ijb}, \mathfrak{R}^a_{ibc}$ подтензора $\mathfrak{R}_A$, удовлетворяющие дифференциальным сравнениям (16), не входят в структурные уравнения (13), но входят в сравнения (17—21).

2. Объект кривизны связности в главном расслоении, ассоциированном с распределением. Определим способом Лаптева групповую связность в ассоциированном расслоении $G(NS_n)$ с помощью формы $\widetilde{\omega}=\omega-\Gamma_i\omega^i-\Gamma_a\omega^a$, где $\omega=\{\omega^i_j, \omega_i, \omega^a_b, \omega^i_a, \omega_a\}$. Дифференциальные уравнения на компоненты объекта связности Г имеют вид

$$\Delta\Gamma^i_{jk}+\omega^i_{jk}=\Gamma^i_{jkl}\omega^l+\Gamma^i_{jka}\omega^a,\quad \Delta\Gamma^i_{ja}-\Gamma^i_{jk}\omega^k_a+\omega^i_{ja}=\Gamma^i_{jak}\omega^k+\Gamma^i_{jab}\omega^b; \tag{22}$$

$$\Delta\Gamma_{ij}+\Gamma^k_{ij}\omega_k+\omega_{ij}=\Gamma_{ijk}\omega^k+\Gamma_{ija}\omega^a,\ \Delta\Gamma_{ia}-\Gamma_{ij}\omega^j_a+\Gamma^j_{ia}\omega_j+\omega_{ia}=\Gamma_{iaj}\omega^j+\Gamma_{iab}\omega^b; \tag{23}$$

$$\Delta\Gamma^a_{bi}+\omega^a_{bi}=\Gamma^a_{bij}\omega^j+\Gamma^a_{bic}\omega^c,\ \Delta\Gamma^a_{bc}-\Gamma^a_{bi}\omega^i_c+\omega^a_{bc}=\Gamma^a_{bci}\omega^i+\Gamma^a_{bcd}\omega^d; \tag{24}$$

$$\begin{aligned}&\Delta\Gamma^i_{aj}-\Gamma^i_{kj}\omega^k_a+\Gamma^b_{aj}\omega^i_b+\omega^i_{aj}=\Gamma^i_{ajk}\omega^k+\Gamma^i_{ajb}\omega^b,\\ &\Delta\Gamma^i_{ab}-\Gamma^i_{aj}\omega^j_b-\Gamma^i_{jb}\omega^j_a+\Gamma^c_{ab}\omega^i_c=\Gamma^i_{abj}\omega^j+\Gamma^i_{abc}\omega^c;\end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned}&\Delta\Gamma_{ai}+\Gamma^j_{ai}\omega_j+\Gamma^b_{ai}\omega_b-\Gamma_{ji}\omega^j_a=\Gamma_{aij}\omega^j+\Gamma_{aib}\omega^b,\\ &\Delta\Gamma_{ab}-\Gamma_{ai}\omega^i_b+\Gamma^i_{ab}\omega_i+\Gamma^c_{ab}\omega_c-\Gamma_{ib}\omega^i_a=\Gamma_{abi}\omega^i+\Gamma_{abc}\omega^c.\end{aligned} \tag{26}$$

Из сравнений (22—26) вытекает

Теорема 2. *Объект групповой связности* Г *в главном расслоении* $G(NS_n)$ *содержит ряд подобъектов: 2 простейших объ-*

екта $\{\Gamma^i_{jk}\}$, $\{\Gamma^a_{bi}\}$*, которые являются подобъектами касательной и нормальной линейных подсвязностей, а также 7 простых объектов:* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$ *— объект касательной линейной связности,* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$ *— объект центропроективной подсвязности,* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{ia}\}$ *— объект центропроективной связности,* $\{\Gamma^a_{bi}, \Gamma^a_{bc}\}$ *— объект нормальной линейной связности,* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$ *— объект линейно-групповой подсвязности,* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}, \Gamma^a_{bi},\ \Gamma^a_{bc},\ \Gamma^i_{aj}, \Gamma^i_{ab}\}$ *— объект линейно--групповой связности и* $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}, \Gamma_{ai}\}$ *— объект групповой подсвязности.*

Компоненты объекта кривизны R групповой связности Г выражаются по формулам

$$\begin{cases} R^{\ i}_{jkl} = \Gamma^i_{j[kl]} - \Gamma^m_{j[k}\Gamma^i_{ml]} - \Gamma^i_{jm}S^m_{kl} - \Gamma^i_{ja}S^a_{kl} + \mathfrak{R}^{\ i}_{jkl} - \Gamma^i_{ja}\Lambda^a_{[kl]}, \\ \widehat{R}^{\ i}_{jka} = \Gamma^i_{jka} - \Gamma^l_{jk}\Gamma^i_{la} - \Gamma^i_{jl}S^l_{ka} - \Gamma^i_{jb}S^b_{ka} + \mathfrak{R}^{\ i}_{jka} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka}, \\ \breve{R}^{\ i}_{jak} = \Gamma^i_{jak} - \Gamma^l_{ja}\Gamma^i_{lk} - \Gamma^i_{jl}S^l_{ak} - \Gamma^i_{jb}S^b_{ak} + \mathfrak{R}^{\ i}_{jak}, \\ R^{\ i}_{jab} = \Gamma^i_{j[ab]} - \Gamma^k_{j[a}\Gamma^i_{kb]} - \Gamma^i_{jk}S^k_{ab} - \Gamma^i_{jc}S^c_{ab} + \mathfrak{R}^{\ i}_{jab}; \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} R_{ijk} = \Gamma_{i[jk]} - \Gamma^l_{i[j}\Gamma_{lk]} - \Gamma_{il}S^l_{jk} - \Gamma_{ia}S^a_{jk} + \mathfrak{R}_{ijk} - \Gamma_{ia}\Lambda^a_{[jk]}, \\ \widehat{R}_{ija} = \Gamma_{ija} - \Gamma^k_{ij}\Gamma_{ka} - \Gamma_{ik}S^k_{ja} - \Gamma_{ib}S^b_{ja} + \mathfrak{R}_{ija} - \Gamma_{ib}\Lambda^b_{ja}, \\ \breve{R}_{ija} = \Gamma_{iaj} - \Gamma^k_{ia}\Gamma_{kj} - \Gamma_{ik}S^k_{aj} - \Gamma_{ib}S^b_{aj} + \mathfrak{R}_{iaj}, \\ R_{iab} = \Gamma_{i[ab]} - \Gamma^k_{i[a}\Gamma_{kb]} - \Gamma_{ij}S^j_{ab} - \Gamma_{ic}S^c_{ab} + \mathfrak{R}_{iab}; \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} R^{\ a}_{bij} = \Gamma^a_{b[ij]} - \Gamma^c_{b[i}\Gamma^a_{cj]} - \Gamma^a_{bk}S^k_{ij} - \Gamma^a_{bc}S^c_{ij} + \mathfrak{R}^{\ a}_{bij} - \Gamma^a_{bc}\Lambda^c_{[ij]}, \\ \widehat{R}^{\ a}_{bic} = \Gamma^a_{bic} - \Gamma^d_{bi}\Gamma^a_{dc} - \Gamma^a_{bj}S^j_{ic} - \Gamma^a_{bd}S^d_{ic} + \mathfrak{R}^{\ a}_{bic} - \Gamma^a_{bd}\Lambda^d_{ic}, \\ \breve{R}^{\ a}_{bic} = \Gamma^a_{bci} - \Gamma^d_{bc}\Gamma^a_{di} - \Gamma^a_{bj}S^j_{ci} - \Gamma^a_{bd}S^d_{ci} + \mathfrak{R}^{\ a}_{bci}, \\ R^{\ a}_{bcd} = \Gamma^a_{b[cd]} - \Gamma^f_{b[c}\Gamma^a_{fd]} - \Gamma^a_{bi}S^i_{cd} - \Gamma^a_{bf}S^f_{cd} + \mathfrak{R}^{\ a}_{bcd}; \end{cases} \tag{29}$$

$$\begin{cases} R^{\ i}_{ajk} = \Gamma^i_{a[jk]} - \Gamma^l_{a[j}\Gamma^i_{lk]} - \Gamma^b_{a[j}\Gamma^i_{bk]} - \Gamma^i_{al}S^l_{jk} - \Gamma^i_{ab}S^b_{jk} + \mathfrak{R}^{\ i}_{ajk} - \Gamma^i_{ab}\Lambda^b_{[jk]}, \\ \widehat{R}^{\ i}_{ajb} = \Gamma^i_{ajb} - \Gamma^k_{aj}\Gamma^i_{kb} - \Gamma^c_{aj}\Gamma^i_{cb} - \Gamma^i_{ak}S^k_{jb} - \Gamma^i_{ac}S^c_{jb} + \mathfrak{R}^{\ i}_{ajb} - \Gamma^i_{ac}\Lambda^c_{jb}, \\ \breve{R}^{\ i}_{ajb} = \Gamma^i_{abj} - \Gamma^k_{ab}\Gamma^i_{kj} - \Gamma^c_{ab}\Gamma^i_{cj} - \Gamma^i_{ak}S^k_{bj} - \Gamma^i_{ac}S^c_{bj} + \mathfrak{R}^{\ i}_{abj}, \\ R^{\ i}_{abc} = \Gamma^i_{a[bc]} - \Gamma^j_{a[b}\Gamma^i_{jc]} - \Gamma^d_{a[b}\Gamma^i_{dc]} - \Gamma^i_{aj}S^j_{bc} - \Gamma^i_{ad}S^d_{bc} + \mathfrak{R}^{\ i}_{abc}; \end{cases} \tag{30}$$

$$\begin{cases} R_{aij} = \Gamma_{a[ij]} - \Gamma^k_{a[i}\Gamma_{kj]} - \Gamma^b_{a[i}\Gamma_{bj]} - \Gamma_{ak}S^k_{ij} - \Gamma_{ab}S^b_{ij} + \Re_{aij} - \Gamma_{ab}\Lambda^b_{[ij]}, \\ \widehat{R}_{aib} = \Gamma_{aib} - \Gamma^j_{ai}\Gamma_{jb} - \Gamma^c_{ai}\Gamma_{cb} - \Gamma_{aj}S^j_{ib} - \Gamma_{ac}S^c_{ib} + \Re_{aib} - \Gamma_{ac}\Lambda^c_{ib}, \\ \breve{R}_{abi} = \Gamma_{abi} - \Gamma^j_{ab}\Gamma_{ji} - \Gamma^c_{ab}\Gamma_{ci} - \Gamma_{aj}S^j_{bi} - \Gamma_{ac}S^c_{bi} + \Re_{abi}, \\ R_{abc} = \Gamma_{a[bc]} - \Gamma^i_{a[b}\Gamma_{ic]} - \Gamma^d_{a[b}\Gamma_{dc]} - \Gamma_{ai}S^i_{bc} - \Gamma_{ad}S^d_{bc} + \Re_{abc}. \end{cases} \tag{31}$$

Введем в рассмотрение объект $M = \{M^a_{jKL}\}$, компоненты которого выражаются по формуле

$$M^a_{jKL} = \Re^a_{jKL} + \Lambda^a_{j[KL]} - \Lambda^a_{jm}S^m_{KL} - \Lambda^a_{jb}S^b_{KL}.$$

Используя сравнения (16) для объекта кривизны $\Re$, дифференциальные сравнения (12_1, 15) для компонент объекта кручения и фундаментального объекта 1-го порядка, а также сравнения для его альтернированных пфаффовых производных

$$\Delta\Lambda^a_{j[kl]} \equiv 0,\ \ \Delta\Lambda^a_{j[kb]} - \Lambda^a_{j[kl]}\omega^l_b \equiv 0,\ \ \Delta\Lambda^a_{j[bc]} - \Lambda^a_{j[kc]}\omega^k_b - \Lambda^a_{j[bk]}\omega^k_c \equiv 0,$$

получим, что компоненты объекта $M = \{M^a_{jkl}, M^a_{jkb}, M^a_{jbc},\}$ удовлетворяют следующим сравнениям:

$$\Delta M^a_{jkl} \equiv 0,\ \ \Delta M^a_{jkb} - M^a_{jkl}\omega^l_b \equiv 0,\ \ \Delta M^a_{jbc} - M^a_{jkc}\omega^k_b + M^a_{jkb}\omega^k_c \equiv 0. \tag{32}$$

Таким образом, объект M является тензором.

Согласно формулам (27), используя дифференциальные сравнения для пфаффовых производных объекта $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$, а именно

$$\begin{cases} \Delta\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{sk}\omega^s_{jl} + \Gamma^s_{jk}\omega^i_{sl} - \Gamma^i_{js}\omega^s_{kl} + (\Lambda^a_{jkl} + \Lambda^a_{jb}\Lambda^b_{kl})\omega^i_a + \\ \quad + \Lambda^a_{jk}\omega^i_{al} - \delta^i_k\omega_{jl} - \delta^i_j\omega_{kl} \equiv 0, \\ \Delta\Gamma^i_{jka} - \Gamma^i_{jkl}\omega^l_a - \Gamma^i_{lk}\omega^l_{ja} + \Gamma^l_{jk}\omega^i_{la} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ka} + (\Lambda^b_{jka} + \Lambda^b_{jc}\Lambda^c_{ka})\omega^i_b - \\ \quad - \delta^i_k\omega_{ja} - \delta^i_j\omega_{ka} \equiv 0, \\ \Delta\Gamma^i_{jak} - \Gamma^i_{jlk}\omega^l_a - \Gamma^i_{la}\omega^l_{jk} + \Gamma^l_{ja}\omega^i_{lk} - \Gamma^i_{jl}\omega^l_{ak} - \Gamma^i_{jb}\omega^b_{ak} + \Lambda^b_{jak}\omega^i_b + \Lambda^b_{ja}\omega^i_{bk} \equiv 0, \\ \Delta\Gamma^i_{jab} - \Gamma^i_{jkb}\omega^k_a - \Gamma^i_{jak}\omega^k_b - \Gamma^i_{ka}\omega^k_{jb} + \Gamma^k_{ja}\omega^i_{kb} - \Gamma^i_{jc}\omega^c_{ab} + \Lambda^c_{jab}\omega^i_c \equiv 0, \end{cases} \tag{33}$$

учитывая сравнения (22) для компонент $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^i_{ja}\}$ и пользуясь сравнениями (15—17) с учетом равенств (2_1, 2_2) для компонент соответствующего объекта кривизны, получим

$$\Delta R^i_{jkl} + M^a_{jkl}\omega^i_a \equiv 0; \tag{34}$$

$$\begin{gathered}\Delta\widehat{R}^{\,i}_{jka} - (\Gamma^i_{jkl} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{jk} - \Gamma^i_{jm}S^m_{kl} - \Gamma^i_{jb}S^b_{kl} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{kl} + \mathfrak{R}^{\,i}_{jkl})\omega^l_a + \\ +(\mathfrak{R}^{\,b}_{jka} + \Lambda^b_{jka} - S^l_{ka}\Lambda^b_{jl} - S^c_{ka}\Lambda^b_{jc})\omega^i_b + \\ +(2\Gamma^i_{jk}\omega_a + 2\Gamma^i_{ja}\omega_k + \Gamma^i_{ka}\omega_j - (\Gamma^i_{lk}\Lambda^b_{ja} + \Gamma^i_{la}\Lambda^b_{jk})\omega^l_b - \delta^i_k\Lambda^b_{ja}\omega_b) \equiv 0;\end{gathered} \tag{35}$$

$$\begin{gathered}\Delta\breve{R}^{\,i}_{jak} - (\Gamma^i_{jlk} - \Gamma^m_{jl}\Gamma^i_{mk} - \Gamma^i_{jm}S^m_{lk} - \Gamma^i_{jb}S^b_{lk} - \Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{lk} + \mathfrak{R}^{\,i}_{jlk})\omega^l_a + \\ +(\mathfrak{R}^{\,b}_{jak} + \Lambda^b_{jak} - S^l_{ak}\Lambda^b_{jl} - S^c_{ak}\Lambda^b_{jc})\omega^i_b + \\ +(2\Gamma^i_{jk}\omega_a + 2\Gamma^i_{ja}\omega_k + \Gamma^i_{ka}\omega_j - (\Gamma^i_{lk}\Lambda^b_{ja} + \Gamma^i_{la}\Lambda^b_{jk})\omega^l_b - \delta^i_k\Lambda^b_{ja}\omega_b) \equiv 0;\end{gathered} \tag{36}$$

$$\begin{gathered}\Delta R^{\,i}_{jab} + M^c_{jab}\omega^i_c - (\mathfrak{R}^{\,i}_{jkb} - \Gamma^i_{jl}S^l_{kb} - \Gamma^i_{jc}S^c_{kb})\omega^k_a - (\mathfrak{R}^{\,i}_{jak} - \Gamma^i_{jl}S^l_{ak} - \Gamma^i_{jc}S^c_{ak})\omega^k_b - \\ -\Gamma^i_{jk[b}\omega^k_{a]} - \Gamma^i_{j[ak}\omega^k_{b]} - \Gamma^i_{jc}\omega^c_{[ab]} + \Gamma^l_{jk}\omega^k_{[a}\Gamma^i_{lb]} + \Gamma^l_{j[a}\omega^k_{b]}\Gamma^i_{lk} \equiv 0.\end{gathered} \tag{37}$$

Введем обозначение

$$\begin{gathered}R^{\,i}_{jka} = \frac{1}{2}(\widehat{R}^{\,i}_{jka} - \breve{R}^{\,i}_{jak}) = R^{\,i}_{j\bar{[}ka\bar{]}} = \\ = \Gamma^i_{j\bar{[}ka\bar{]}} - \Gamma^i_{l[k}\Gamma^l_{ja]} - \Gamma^i_{jl}S^l_{ka} - \Gamma^i_{jb}S^b_{ka} + \mathfrak{R}^{\,i}_{jka} - \frac{1}{2}\Gamma^i_{jb}\Lambda^b_{ka},\end{gathered}$$

где « $\bar{[}\ \bar{]}$ » — обобщенное альтернирование, когда действие производится не над одним объектом, а берется полуразность двух разных объектов, тогда из сравнений (35—37) получаем

$$\Delta R^{\,i}_{jka} - R^{\,i}_{jkl}\omega^l_a + M^b_{jka}\omega^i_b \equiv 0, \quad \Delta R^{\,i}_{jab} - R^{\,i}_{jkb}\omega^k_a + R^{\,i}_{jka}\omega^k_b + M^c_{jab}\omega^i_c \equiv 0. \tag{38}$$

Проводя аналогичные действия, мы находим сравнения для остальных компонент объекта $R = \{R^{\,i}_{jKL}, R_{iJK}, R^{\,a}_{bIJ}, R^{\,i}_{aJK}, R_{aIJ}\}$:

$$\begin{gathered}\Delta R_{ijk} + R^{\,l}_{ijk}\omega_l + M^a_{ijk}\omega_a \equiv 0, \quad \Delta R_{ija} - R_{ikj}\omega^k_a + R^{\,k}_{ija}\omega_k + M^b_{ija}\omega_b \equiv 0, \\ \Delta R_{iab} - R_{ijb}\omega^j_a + R^{\,j}_{iab}\omega_j + R_{ija}\omega^j_b + M^c_{iab}\omega_c \equiv 0, \quad \Delta R^{\,a}_{bij} - M^a_{kij}\omega^k_b \equiv 0, \\ \Delta R^{\,a}_{bic} - R^{\,a}_{bji}\omega^j_c - M^a_{jic}\omega^i_b \equiv 0, \quad \Delta R^{\,a}_{bcd} - R^{\,a}_{bid}\omega^i_c + R^{\,a}_{bic}\omega^i_d - M^a_{icd}\omega^i_b \equiv 0, \\ \Delta R^{\,i}_{ajk} + R^{\,b}_{ajk}\omega^i_b - R^{\,i}_{ljk}\omega^l_a \equiv 0, \quad \Delta R^{\,i}_{ajb} + R^{\,c}_{ajb}\omega^i_c - R^{\,i}_{kjb}\omega^k_a - R^{\,i}_{ajk}\omega^k_b \equiv 0, \\ \Delta R^{\,i}_{abc} + R^{\,d}_{abc}\omega^i_d - R^{\,i}_{jbc}\omega^j_a - R^{\,i}_{ajc}\omega^j_b + R^{\,i}_{ajb}\omega^j_c \equiv 0, \\ \Delta R_{aij} - R_{kij}\omega^k_a + R^{\,k}_{aij}\omega_k + R^{\,b}_{aij}\omega_b \equiv 0, \\ \Delta R_{aib} - R_{jib}\omega^j_a + R^{\,j}_{aib}\omega_j + R^{\,c}_{aib}\omega_c - R_{aji}\omega^j_b \equiv 0, \\ \Delta R_{abc} + R^{\,i}_{abc}\omega_i + R^{\,d}_{abc}\omega_d - R_{ibc}\omega^i_a - R_{aic}\omega^i_b + R_{aib}\omega^i_c \equiv 0.\end{gathered} \tag{39}$$

Сравнения (34, 38—39) позволяют сформулировать следующие результаты:

Теорема 3. *Объект кривизны* R *связности* Γ *в главном расслоении, ассоциированном с распределением плоскостей в каноническом пространстве проективной связности Картана, образует тензор лишь в совокупности с тензором* M.

Следствие. *Объект кривизны* R *связности* Γ *самостоятельно образует тензор лишь в случае обращения тензора* M *в нуль*.

Назовем тензор M^a_{iJK} антисимметричным по индексам J и K тензором нетензорности объекта кривизны R групповой связности в главном расслоении $G(NS_n)$ в пространстве проективной связности Картана $P_{n,n}$.

Замечание 2. Наши результаты отличаются от результатов Г.Ф. Лаптева и Н.М. Остиану, которые проводили исследование в другом аналитическом аппарате. В работе [4] утверждается, что объект кривизны $R=\{R^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}\}$ ($\bar{i},\bar{j},\bar{k}=\overline{0,m}$; $K,L=\overline{1,n}$), компоненты которого вычислялись по формуле $R^{\bar{i}}_{\bar{j}KL}=\Gamma^{\bar{i}}_{\bar{j}[KL]}$, в общем случае является тензором.

Список литературы

1. *Cartan E.* Lecons sur la theorie des espaces a connexion projective. Paris, 1937.

2. *Шевченко Ю.И.* Тензор аффинного кручения-кривизны проективной связности Картана // Тр. междунар. конф. Якоби. Калининград, 2005.

3. *Омельян О.М.* Нетензорность объекта кривизны групповой связности на распределении плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 2002. Вып. 33. С. 74—78.

4. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

O. Omelyan

THE OBJECT OF CURVATURE OF GROUP CONNECTION ON THE DISTRIBUTION OF PLANES IN A SPACE OF PROJECTIVE CARTAN'S CONNECTION

The canonical space of a projective Cartan's connection with the structural equations which generalize appropriate equations of a space of affine connection is considered. In space of a projective connection the distribution of planes is investigated. This distribution generates series of subtensors of torsion-curvature's tensor. It is shown, that the object of curvature of group connection in a principal bundle associated with distribution of planes is a tensor only in aggregate with some tensor, making it vanish, the object of curvature independently forms a tensor.

УДК 514.76

В.И. Паньженский

(Пензенский государственный педагогический университет)

НЕВЫРОЖДЕННЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ И ЕСТЕСТВЕННЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЛАГРАНЖИАНОВ

Вводится понятие естественной последовательности лагранжианов лагранжева пространства $L^n = (M, L)$ и стабильного лагранжиана. Получены необходимые условия стабильности лагранжиана и установлено, что среди однородных лагранжианов стабильными являются финслеров лагранжиан, степень однородности которого равна 2, и лагранжиан однородный степени -1.

1. Финслерова геометрия — это геометрия невырожденного лагранжиана $F(x, y)$, однородного второй степени по коор-