Список литературы

1. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование квазигеодезических потоков // Доклады АН СССР. 1991. Т. 320. № 3. С. 531 – 535.
2. *Игошин В.А.* Пульверизационное моделирование 1, 2, 3 // Изв. вузов. Мат. 1992. № 6. С. 63 – 71; 1994. № 10. С. 26 – 32; 1995. № 5. С. 39 – 50.
3. *Игошин В.А., Коткова Н.В.* Существование римановой метрики плоскости с заданными символами Кристоффеля / Нижегород. гос. ун-т им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород, 2002. Деп. в ВИНИТИ, № 168-В2003.
4. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979. 256 с.
5. *Рашевский П.К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Гостехиздат, 1967. 664 с.

V. Igoshin, N. Kotkova

ABOUT PROJECTIVELY RIEMANNIAN QUASIGEODESIC FLOWS

The series of theorems is obtained on the basis of the method of pulverization modelling [1; 2] and the results of [3]. This theorems are about existence of the Riemannian connection, projectively equivalent to the given symmetric affine connection or connection of one-dimensional quasigeodesic flow.

УДК 514.76

В.М. Исаев, С.Е. Степанов
(Владимирский государственный педагогический университет)

О КОНФОРМНО КИЛЛИНГОВОМ ТЕНЗОРЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

Настоящая статья является продолжением работы авторов [1] и посвящена изучению конформно киллинговых тензорных полей на римановом многообразии постоянной ненулевой кривизны.

1. Введение и основной результат.

Хорошо известно (см. [2]), что на n-мерном римановом многообразии постоянной ненулевой кривизны C произвольный конформно киллинговый тензор ω ранга $p \le n-1$ с компонентами $\omega_{i_1..i_p}$ допускает представление

$$\omega_{i_1 i_2..i_p} = \theta_{i_1 i_2..i_p} - \frac{1}{pC} \nabla_{i_1} \theta_{i_2..i_p}, \tag{1.1}$$

где $\theta_{i_1 i_2..i_p}$ и $\theta_{i_2..i_p}$ – компоненты тензоров Киллинга рангов p и $p-1$ соответственно. В настоящей статье, опираясь на (1.1), докажем, что справедлива

Теорема. *На n-мерном римановом многообразии $(M,\ g)$ постоянной ненулевой кривизны C существует локальная система координат $x^1,\ ...,\ x^n$, в которой произвольный конформно киллинговый тензор θ ранга p $(1 \le p \le n-1)$ имеет компоненты*

$$\omega_{i_1..i_p} = e^{(p+1)\psi}\left(A_{ki_1..i_p} x^k + B_{i_1..i_p}\right) -$$

$$- \frac{1}{C} e^{p\psi} \left(\psi_{[i_1} A_{|k|i_2..i_p]} x^k + \psi_{[i_1} B_{i_2..i_p]} + \frac{1}{p} A_{i_1 i_2..i_p} \right) \tag{1.2}$$

для $\psi = \frac{1}{2(n+1)} ln|det\, g|$; $\psi_i = \partial_i \psi$ *и произвольных кососимметричных по всем индексам постоянных* $A_{i_1..i_p}$ *и* $B_{i_2..i_p}$.

2. Доказательство теоремы.

2.1. Известно, что проективный диффеоморфизм $f : (\overline{M},\ \overline{g}) \to (M,\ g)$ римановых многообразий можно осуществить [3, с. 46 – 47] по принципу равенства локальных координат $\overline{x}^1 = x^1$, …, $\overline{x}^n = x^n$ в соответствующих точках $\overline{x}$ и $x = f(\overline{x})$ этих многообразий. В этом случае справедливы равенства [4, с. 162; 3, с. 73 – 75]

$$T_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \overline{\Gamma}_{ij}^k = \psi_i \delta_j^k + \psi_j \delta_i^k \tag{2.1}$$

для компонент T_{ij}^k тензора деформации $T = \nabla - \overline{\nabla}$ и объектов Γ_{ij}^k и $\overline{\Gamma}_{ij}^k$ связностей Леви-Чивита ∇ и $\overline{\nabla}$ в общей по отображению $f : (\overline{M},\ \overline{g}) \to (M,\ g)$ системе координат $x^1,\ ...,\ x^n$, а также для $\psi_j = \partial_j \psi$ и $\psi = \frac{1}{2(n+1)} ln\left(\frac{det\, g}{det\, \overline{g}}\right)$.

Полагаем $\theta_{i_1..i_p}$ компонентами произвольного тензора Киллинга-Яно θ ранга p $(1 \le p \le n-1)$, которые согласно определению удовлетворяют уравнениям вида $\nabla_k \omega_{ji_2..i_p} + \nabla_j \omega_{ki_2..i_p} = 0$. На основании равенств (2.1) непосредственно убеждаемся, что для тензорного поля $\overline{\theta} = e^{-(p+1)\psi} f^* \theta$ его компоненты

$$\overline{\theta}_{i_1..i_p} = e^{-(p+1)\psi} \theta_{i_1..i_p} \tag{2.2}$$

удовлетворяют следующим уравнениям: $\overline{\nabla}_k \overline{\theta}_{ji_2..i_p} + \overline{\nabla}_j \overline{\theta}_{ki_2..i_p} = 0$. Следовательно, $\overline{\theta}$ является тензором Киллинга-Яно ранга p $(1 \le p \le n-1)$ уже на многообразии $(\overline{M},\ \overline{g})$.

2.2. В статье [5] нами было доказано, что в декартовой системе координат $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n$ окрестности *U* произвольной точки *x* локально плоского многообразия $(\overline{M},\ \overline{g})$ компоненты $\overline{\theta}_{i_1..i_p}$ тензора Киллинга-Яно ранга p $(1 \le p \le n-1)$ имеют строение $\overline{\theta}_{i_1..i_p} = A_{ki_1..i_p} \overline{x}^k + B_{i_1..i_p}$ для произвольных кососимметричных по всем индексам постоянных $A_{ki_1..i_p}$ и $B_{i_1..i_p}$. На основании выражения (2.2) заключаем, что компоненты $\theta_{i_1..i_p}$ произвольного тензора Киллинга-Яно ранга p $(1 \le p \le n-1)$ на n-мерном многообразии $(M,\ g)$ постоянной кривизны имеют строение

$$\theta_{i_1..i_p} = e^{p\psi}\left(A_{ki_1..i_p} x^k + B_{i_1..i_p}\right), \tag{2.3}$$

где $\psi = \dfrac{1}{2(n+1)} ln(det\, g)$, ибо в декартовой системе координат $\overline{x}^1, \ldots, \overline{x}^n$ компоненты метрического тензора $\overline{g}$ имеют вид $\overline{g}_{ij} = \delta_{ij}$ для символа Кронекера δ_{ij}. При этом многообразие $(M,\ g)$ считается отнесенным к специальной системе локальных координат $x^1, \ldots, x^n$, в которой согласно равенствам (2.1) символы Кристофеля имеют вид

$$\Gamma^k_{ij} = \psi_i \delta^k_j + \psi_j \delta^k_i. \tag{2.4}$$

2.3. Найдем теперь выражение для второго слагаемого $\frac{1}{pC}\nabla_{i_1}\theta_{i_2..i_p}$ в разложении (1.1). Здесь $\nabla_{i_1}\theta_{i_2..i_p} = \partial_{i_1}\theta_{i_2..i_p} -$ $-\theta_{k..i_p}\Gamma^k_{i_2 i_1} - \ldots - \theta_{i_2..k}\Gamma^k_{i_p i_1}$ – выражение ковариантной производной $\nabla\theta$ тензора Киллинга-Яно θ ранга $p-1$. Поскольку в используемой выше локальной системе координат $x^1, \ldots, x^n$ имеем $\theta_{i_2..i_p} = e^{p\psi}\left(A_{ki_2..i_p}x^k + B_{i_2..i_p}\right)$, а символы Кристофеля Γ^k_{ij} находятся из равенств (2.4), то

$$\frac{1}{pC}\nabla_{i_1}\theta_{i_2..i_p} = -\frac{1}{C}e^{p\psi}\left(\psi_{[i_1}A_{|k|i_2..i_p]}x^k + \psi_{[i_1}B_{i_2..i_p]} + \frac{1}{p}A_{i_1 i_2..i_p}\right). \quad (2.5)$$

Теперь на основании равенств (1.1), (2.3) и (2.5) заключаем, что справедливо выражение (1.2) для компонент произвольного конформно киллингова тензора на римановом многообразии $(M,\ g)$ постоянной кривизны $C \neq 0$.

Список литературы

1. *Исаев В.М., Степанов С.Е.* Примеры киллинговой и конформно киллинговой форм // Диф. геом. многооб. фигур. Калининград, 2001. Вып. 32. С. 52 – 57.

2. *Tachibana S.-I.* On conformal Killing tensor // Tohoku Math. Journ. 1969. Vol. 21. P. 56 – 64.

3. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. М.: Наука, 1979.

4. *Эйзенхарт Л.П.* Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948.

5. *Stepanov S.E.* On conformal Killing 2-form of the electromagnetic field // Journal of Geometry and Physics. 2000. Vol. 33. № 3 – 4. P. 191 – 209.

V. Isaev, S. Stepanov

ON CONFORMAL KILLING TENSOR IN A RIEMANNIAN MANIFOLD OF CONSTANT CURVATURE

The view of an arbitrary conformal Killing tensor on a Riemannian manifold of nonvanishing constant curvature is retrieved.