УДК 514.75

Н.А. Елисеева

(*Калининградский государственный университет*)

ДВОЙСТВЕННЫЙ ОБРАЗ Н(П)-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Приведено задание в репере первого порядка регулярного Н(П)-распределения проективного пространства P_n. Построен его двойственный образ относительно некоторого инволютивного преобразования $\mathfrak{J}$ структурных форм проективного пространства P_n.

Схема использования индексов в данной работе такова:

$$\bar{I},\bar{K},\bar{L}=\overline{0,n};\ I,K,L=\overline{1,n};\ p,q,s,t,f=\overline{1,r};\ \alpha,\beta,\gamma,\varepsilon,\delta=\overline{m+1,n-1};$$

$$a,b,c,d=\overline{1,m};\ i,j,k,l=\overline{r+1,m};\ \hat{u},\hat{v}=\overline{r+1,n};\ \hat{\alpha},\hat{\beta}=\overline{m+1,n};\ \sigma,\rho=\overline{1,n-1}.$$

Знак « $\equiv$ » означает сравнение по модулю базисных форм ω_0^K.

§1. Задание Н(П)-распределения проективного пространства

1. Пусть P_n – n-мерное проективное пространство, отнесенное к подвижному точечному реперу R=$\{A_{\bar{I}}\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид $dA_{\bar{I}}=\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}A_{\bar{K}}$, где формы Пфаффа $\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ подчинены уравнениям структуры проективного пространства

$$D\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}=\omega_{\bar{I}}^{\bar{L}}\wedge\omega_{\bar{L}}^{\bar{K}},\ \sum_{\bar{I}=0}^{n}\omega_{\bar{I}}^{\bar{I}}=0. \tag{1}$$

Определение [1]. Пару распределений 1-го рода соответственно r-мерных плоскостей Λ (Λ-распределение) и m-мерных плоскостей М (М-распределение) пространства P_n с отношением инцидентности $X\in\Lambda\subset M$ (r<m<n-1) их соответствующих элементов в каждом центре Х назовем m-полосным распределением П (или П-распределением), в котором Λ-распределение назовем базисным, а М-распределение – оснащающим.

Как показано в работе [2], с регулярным П-распределением в первой дифференциальной окрестности инвариантно ассоциируется поле гиперплоскостей H_{n-1}(X) (Н-распределение) таких, что $X\in\Lambda(X)\subset M(X)\subset H(X)$.

Определение. П-распределение, оснащенное полем Н-плоскостей, назовем Н(П)-распределением.

Рассмотрим некоторые фокальные образы, ассоциированные с оснащающей гиперплоскостью Н(Х). Прежде всего выделим характеристику Φ_{n-r-1}(X) (Ф-плоскость) гиперплоскости Н(Х), полученную при смещениях центра Х вдоль кривых, принадлежащих Λ-распределению. Плоскость Ф(Х) пересекает соответствующую плоскость М(Х) П-распределения по s-мерной плоскости L_s:

$$\Phi(X)\cap M(X)=L(X),\ \text{где } s=m-r.$$

Другим фокальным образом плоскости Н(Х) является ее характеристика E_{n-m-1}(X), полученная при смещениях центра Х вдоль интегральных кривых М-распределения. При этом в каждом центре X Н(П)-распределения выполняются соотношения инцидентности:

$$[\Lambda, L]=M,\ [L, E]=\Phi,\ L\cap\Lambda=X,\ M\cap E=X.$$

Адаптируем репер R полученным плоскостям:

$$X\equiv A_0,\ \{A_p\}\subset\Lambda(A_0),\ \{A_i\}\subset L(A_0),\ \{A_\alpha\}\subset E(A_0).$$

Выбранный таким образом репер является репером 1-го порядка R^1. Относительно репера R^1 дифференциальные уравнения Н(П)-распределения имеют вид:

$$\begin{gathered}\omega_p^n=\Lambda_{pK}^n\omega_0^K,\ \omega_p^i=\Lambda_{pK}^i\omega_0^K,\ \omega_p^\alpha=\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^K,\ \omega_i^n=\Lambda_{i\hat{u}}^n\omega_0^{\hat{u}},\ \omega_i^p=\Lambda_{iK}^p\omega_0^K,\\ \omega_i^\alpha=\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^K,\ \omega_\alpha^n=\Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n\omega_0^{\hat{\beta}},\ \omega_\alpha^p=\Lambda_{\alpha K}^p\omega_0^K,\ \omega_\alpha^i=\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^K.\end{gathered}\tag{2}$$

Отметим, что

$$\Lambda_{\alpha i}^n=0,\ \Lambda_{\alpha p}^n=0,\ \Lambda_{ip}^n=0\tag{3}$$

в силу того, что $\{A_\alpha;A_i\}\subset\Phi(A_0)$, $\{A_\alpha\}\subset E(A_0)$. Геометрические объекты $\Gamma_1=\left\{\Lambda_{pK}^n,\Lambda_{pK}^i,\Lambda_{pK}^\alpha,\Lambda_{i\hat{u}}^n,\Lambda_{iK}^\alpha,\Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n\right\}$ и $\Gamma_2=\left\{\Gamma_1,\Lambda_{iK}^p,\Lambda_{\alpha K}^p,\Lambda_{\alpha K}^i\right\}$ являются соответственно фундаментальными геометрическими объектами 1-го и 2-го порядка. Замыкание уравнений (2) с учетом (3) приводит к следующим дифференциальным уравнениям, которым подчинены компоненты фундаментального объекта Γ_2:

$$\begin{array}{lr}\nabla\Lambda_{pK}^n+\Lambda_{pK}^n\omega_0^0-\omega_p^0\delta_K^n=\Lambda_{pKL}^n\omega_0^L, & \text{(а)}\\ \nabla\Lambda_{pK}^i+\Lambda_{pK}^i\omega_0^0+\Lambda_{pK}^n\omega_n^i-\omega_p^0\delta_K^i=\Lambda_{pKL}^i\omega_0^L, & \\ \nabla\Lambda_{pK}^\alpha+\Lambda_{pK}^\alpha\omega_0^0+\Lambda_{pK}^n\omega_n^\alpha-\omega_p^0\delta_K^\alpha=\Lambda_{pKL}^\alpha\omega_0^L, & \\ \nabla\Lambda_{i\hat{u}}^n+\Lambda_{i\hat{u}}^n\omega_0^0-\omega_i^0\delta_{\hat{u}}^n=\Lambda_{i\hat{u}K}^n\omega_0^K, & \text{(в)}\\ \nabla\Lambda_{iK}^p+\Lambda_{iK}^p\omega_0^0+\Lambda_{iK}^n\omega_n^p-\omega_i^0\delta_K^p=\Lambda_{iKL}^p\omega_0^L, & \\ \nabla\Lambda_{iK}^\alpha+\Lambda_{iK}^\alpha\omega_0^0+\Lambda_{iK}^n\omega_n^\alpha-\omega_i^0\delta_K^\alpha=\Lambda_{iKL}^\alpha\omega_0^L, & \\ \nabla\Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n+\Lambda_{\alpha\hat{\beta}}^n\omega_0^0-\omega_\alpha^0\delta_{\hat{\beta}}^n=\Lambda_{\alpha\hat{\beta}K}^n\omega_0^K, & \text{(с)}\\ \nabla\Lambda_{\alpha K}^p+\Lambda_{\alpha K}^p\omega_0^0+\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^p-\omega_\alpha^0\delta_K^p=\Lambda_{\alpha KL}^p\omega_0^L, & \\ \nabla\Lambda_{\alpha K}^i+\Lambda_{\alpha K}^i\omega_0^0+\Lambda_{\alpha K}^n\omega_n^i-\omega_\alpha^0\delta_K^i=\Lambda_{\alpha KL}^i\omega_0^L. & \end{array}\tag{4}$$

Итак, оснащенное m-полосное распределение Н(П) относительно репера 1-го порядка R^1 задается уравнениями (2), (4).

2. Так как Н(П)-, П-, М-, Н-распределения – регулярны [3; 4], то тензоры Λ_{pq}^n, Λ_{ij}^n, Λ_{ab}^n, $\Lambda_{\alpha\beta}^n$ – невырожденные, т.е.

$$\Lambda\overset{def}{=}\det\left\|\Lambda_{pq}^n\right\|\neq 0;\ L\overset{def}{=}\det\left\|\Lambda_{ij}^n\right\|\neq 0;\ M\overset{def}{=}\det\left\|\Lambda_{ab}^n\right\|=\Lambda\cdot L\neq 0;\ H\overset{def}{=}\det\left\|\Lambda_{\alpha\beta}^n\right\|\neq 0.\tag{5}$$

Главный фундаментальный тензор $S_{\sigma\rho}^n$ Н-распределения – невырожденный:

$$S\overset{def}{=}\det\left\|S_{\sigma\rho}^n\right\|=\det\begin{Vmatrix}\Lambda_{pq}^n & \Lambda_{pj}^n & \Lambda_{p\beta}^n\\ 0 & \Lambda_{ij}^n & \Lambda_{i\beta}^n\\ 0 & 0 & \Lambda_{\alpha\beta}^n\end{Vmatrix}=\Lambda\cdot L\cdot H\neq 0\cdot\tag{6}$$

Для тензоров 1-го порядка Λ_{pq}^{n}, Λ_{ij}^{n}, $\Lambda_{\alpha\beta}^{n}$ легко можно ввести обращенные тензоры Λ_{n}^{pq}, Λ_{n}^{ij}, $\Lambda_{n}^{\alpha\beta}$, компоненты которых удовлетворяют соответственно уравнениям:

$$\begin{gathered}\Lambda_{n}^{pq}\Lambda_{qt}^{n}=\Lambda_{n}^{qp}\Lambda_{tq}^{n}=\delta_{t}^{p},\ \nabla\Lambda_{n}^{pq}-\Lambda_{n}^{pq}\omega_{0}^{0}=\Lambda_{nK}^{pq}\omega_{0}^{K},\\ \Lambda_{n}^{ij}\Lambda_{jk}^{n}=\Lambda_{n}^{ji}\Lambda_{kj}^{n}=\delta_{k}^{i},\ \nabla\Lambda_{n}^{ij}-\Lambda_{n}^{ij}\omega_{0}^{0}=\Lambda_{nK}^{ij}\omega_{0}^{K},\\ \Lambda_{n}^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta\gamma}^{n}=\Lambda_{n}^{\beta\alpha}\Lambda_{\gamma\beta}^{n}=\delta_{\gamma}^{\alpha},\ \nabla\Lambda_{n}^{\alpha\beta}-\Lambda_{n}^{\alpha\beta}\omega_{0}^{0}=\Lambda_{nK}^{\alpha\beta}\omega_{0}^{K}.\end{gathered}\tag{7}$$

Величины Λ, L, H (5) являются относительными инвариантами:

$$\begin{gathered}d\ln\Lambda=2\omega_{p}^{p}-r(\omega_{0}^{0}+\omega_{n}^{n})+\Lambda_{K}\omega_{0}^{K},\ d\ln L=2\omega_{i}^{i}-s(\omega_{0}^{0}+\omega_{n}^{n})+L_{K}\omega_{0}^{K};\\ d\ln \mathrm{H}=2\omega_{\alpha}^{\alpha}-(n-m-1)(\omega_{0}^{0}+\omega_{n}^{n})+\mathrm{H}_{K}\omega_{0}^{K},\end{gathered}\tag{8}$$

где

$$\Lambda_{K}=\Lambda_{n}^{qp}\Lambda_{pqK}^{n},\ L_{K}=\Lambda_{n}^{ji}\Lambda_{ijK}^{n},\ \mathrm{H}_{K}=\Lambda_{n}^{\beta\alpha}\Lambda_{\alpha\beta K}^{n}.\tag{9}$$

Величины (9) удовлетворяют соответственно сравнениям:

$$\begin{aligned}&\nabla\Lambda_{K}+\Lambda_{K}\omega_{0}^{0}+(r+2)\delta_{K}^{q}\omega_{q}^{0}+r\delta_{K}^{j}\omega_{j}^{0}+r\delta_{K}^{\beta}\omega_{\beta}^{0}-(r+2)\Lambda_{qK}^{n}\omega_{n}^{q}-\\ &-r\Lambda_{\beta K}^{n}\omega_{n}^{\beta}-r\Lambda_{jK}^{n}\omega_{n}^{j}\equiv 0,\\ &\nabla L_{K}+L_{K}\omega_{0}^{0}+(s+2)\delta_{K}^{l}\omega_{l}^{0}+s\delta_{K}^{q}\omega_{q}^{0}+s\delta_{K}^{\beta}\omega_{\beta}^{0}-(s+2)\Lambda_{jK}^{n}\omega_{n}^{j}-\\ &-s\Lambda_{qK}^{n}\delta_{n}^{q}-s\Lambda_{\beta K}^{n}\omega_{n}^{\beta}\equiv 0,\\ &\nabla\mathrm{H}_{K}+\mathrm{H}_{K}\omega_{0}^{0}+(n-m+1)\delta_{K}^{j}\omega_{j}^{0}+(n-m-1)\delta_{K}^{q}\omega_{q}^{0}+(n-m-1)\delta_{K}^{i}\omega_{i}^{0}-\\ &-(n-m+1)\Lambda_{jK}^{n}\omega_{n}^{j}-(n-m-1)\Lambda_{qK}^{n}\omega_{n}^{q}-(n-m-1)\Lambda_{jK}^{n}\omega_{n}^{j}\equiv 0.\end{aligned}\tag{10}$$

Введем в рассмотрение величины

$$\Phi_{K}=\frac{1}{n+1}\left(\Lambda_{K}+L_{K}+\mathrm{H}_{K}\right),\tag{11}$$

которые в силу (10) удовлетворяют сравнениям

$$\nabla\Phi_{K}+\Phi_{K}\omega_{0}^{0}+\delta_{K}^{\sigma}\omega_{\sigma}^{0}-\Lambda_{\sigma K}^{n}\omega_{n}^{\sigma}\equiv 0.\tag{12}$$

§2. Двойственный образ H(П)-распределения

1. Рассмотрим систему из (n+1)^2 форм Пфаффа $\bar{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{I}}$:

$$\begin{aligned}&\bar{\omega}_{0}^{0}=\omega_{0}^{0}-\Phi_{K}\omega_{0}^{K},\ \bar{\omega}_{0}^{n}=\omega_{0}^{n},\ \bar{\omega}_{0}^{p}=\omega_{0}^{p}+\Lambda_{n}^{pq}\Lambda_{q\hat{v}}^{n}\omega_{0}^{\hat{v}},\ \bar{\omega}_{0}^{i}=\omega_{0}^{i}+\Lambda_{n}^{ij}\Lambda_{j\hat{\alpha}}^{n}\omega_{0}^{\hat{\alpha}},\\ &\bar{\omega}_{0}^{\alpha}=\omega_{0}^{\alpha}+\Lambda_{n}^{\alpha\beta}\Lambda_{\beta n}^{n}\omega_{0}^{n},\ \bar{\omega}_{n}^{0}=\omega_{n}^{0},\ \bar{\omega}_{n}^{p}=-\Lambda_{n}^{pq}\omega_{q}^{0},\ \bar{\omega}_{n}^{j}=-\Lambda_{n}^{ji}\omega_{i}^{0},\\ &\bar{\omega}_{n}^{\beta}=-\Lambda_{n}^{\beta\alpha}\omega_{\alpha}^{0},\ \bar{\omega}_{n}^{n}=\omega_{n}^{n}-\Phi_{K}\omega_{0}^{K},\ \bar{\omega}_{p}^{0}=\Lambda_{qp}^{n}\omega_{n}^{q},\ \bar{\omega}_{p}^{i}=-\Lambda_{qp}^{n}\Lambda_{n}^{ij}\omega_{j}^{q},\\ &\bar{\omega}_{p}^{n}=-\Lambda_{qp}^{n}\omega_{0}^{q}\ \text{(a)},\ \bar{\omega}_{p}^{\alpha}=-\Lambda_{qp}^{n}\Lambda_{n}^{\alpha\beta}\omega_{\beta}^{q},\ \bar{\omega}_{i}^{0}=\Lambda_{ji}^{n}\omega_{n}^{j},\\ &\bar{\omega}_{p}^{s}=\omega_{p}^{s}+\Lambda_{n}^{sq}\Lambda_{qpK}^{n}\omega_{0}^{K}-\delta_{p}^{s}\Phi_{K}\omega_{0}^{K},\ \bar{\omega}_{i}^{k}=\omega_{i}^{k}+\Lambda_{n}^{kl}\Lambda_{liK}^{n}\omega_{0}^{K}-\delta_{i}^{k}\Phi_{K}\omega_{0}^{K},\\ &\bar{\omega}_{i}^{p}=-\Lambda_{ji}^{n}\Lambda_{n}^{pq}\omega_{q}^{j},\ \bar{\omega}_{i}^{\alpha}=-\Lambda_{ji}^{n}\Lambda_{n}^{\alpha\beta}\omega_{\beta}^{j},\ \bar{\omega}_{i}^{n}=-\Lambda_{ji}^{n}\omega_{0}^{j}\ \text{(в)},\\ &\bar{\omega}_{\alpha}^{0}=\Lambda_{\beta\alpha}^{n}\omega_{n}^{\beta},\ \bar{\omega}_{\alpha}^{i}=-\Lambda_{n}^{ij}\Lambda_{\beta\alpha}^{n}\omega_{j}^{\beta},\ \bar{\omega}_{\alpha}^{p}=-\Lambda_{n}^{pq}\Lambda_{\beta\alpha}^{n}\omega_{q}^{\beta},\\ &\bar{\omega}_{\alpha}^{n}=-\Lambda_{\alpha\beta}^{n}\omega_{0}^{\beta}\ \text{(c)},\ \bar{\omega}_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\beta}-\delta_{\alpha}^{\beta}\Phi_{K}\omega_{0}^{K}+\Lambda_{n}^{\beta\gamma}\Lambda_{\gamma\alpha K}^{n}\omega_{0}^{K}.\end{aligned}\tag{13}$$

Формы $\overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{I}}$ удовлетворяют структурным уравнениям проективного пространства и задают инфинитезимальные перемещения тангенциального репера $\{\tau_{\bar{I}}\}$:

$$d\tau_{\bar{I}} = \overline{\omega}_{\bar{I}}^{\bar{K}} \tau_{\bar{K}}, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}
\tau_0 = \rho\left[\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_\alpha\right], \ \tau_n = \rho\left[\mathrm{A}_n, \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_\alpha\right], \\
\tau_p = \rho \sum_q \Lambda_{qp}^n \left[\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_{q-1}, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{q+1}, \ldots, \mathrm{A}_r, \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_\alpha\right], \\
\tau_i = \rho \sum_j \Lambda_{ji}^n \left[\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_{r+1}, \ldots, \mathrm{A}_{j-1}, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{j+1}, \ldots, \mathrm{A}_m, \mathrm{A}_\alpha\right], \\
\tau_\alpha = \rho \sum_\beta \Lambda_{\beta\alpha}^n \left[\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_p, \mathrm{A}_i, \mathrm{A}_{m+1}, \ldots, \mathrm{A}_{\beta-1}, \mathrm{A}_n, \mathrm{A}_{\beta+1}, \ldots, \mathrm{A}_{n-1}\right], \\
\rho = \frac{1}{\sqrt[n+1]{\Lambda \cdot L \cdot \mathrm{H}}} = \frac{1}{\sqrt[n+1]{S}}.
\end{gathered} \tag{15}$$

Используя формулы (1) – (13) и следуя работам [4; 5], можно доказать, что преобразование $\mathtt{I}: \omega_{\bar{K}}^{\bar{I}} \to \overline{\omega}_{\bar{K}}^{\bar{I}}$ форм проективного пространства по закону (13) является инволютивным, т.е. $\mathtt{I} = \mathtt{I}^{-1}$.

Дифференциальные уравнения регулярного $\overline{\mathrm{H}(\Pi)}$-распределения, двойственного данному регулярному Н(П)-распределению, имеют аналогичный вид (2) (здесь не выписываются соответствующие замыкания):

$$\begin{gathered}
\overline{\omega}_p^n = \overline{\Lambda}_{pK}^n \overline{\omega}_0^K, \ \overline{\omega}_p^i = \overline{\Lambda}_{pK}^i \overline{\omega}_0^K, \ \overline{\omega}_p^\alpha = \overline{\Lambda}_{pK}^\alpha \overline{\omega}_0^K, \ \overline{\omega}_i^n = \overline{\Lambda}_{i\hat{u}}^n \overline{\omega}_0^{\hat{u}}, \ \overline{\omega}_i^p = \overline{\Lambda}_{iK}^p \overline{\omega}_0^K, \\
\overline{\omega}_i^\alpha = \overline{\Lambda}_{iK}^\alpha \overline{\omega}_0^K, \ \overline{\omega}_\alpha^n = \overline{\Lambda}_{\alpha\hat{\beta}}^n \overline{\omega}_0^{\hat{\beta}}, \ \overline{\omega}_\alpha^p = \overline{\Lambda}_{\alpha K}^p \overline{\omega}_0^K, \ \overline{\omega}_\alpha^i = \overline{\Lambda}_{\alpha K}^i \overline{\omega}_0^K.
\end{gathered} \tag{16}$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. *Регулярное Н(П)-распределение проективного пространства P_n во второй дифференциальной окрестности его образующего элемента индуцирует: 1) проективное пространство $\overline{P}_n$, двойственное исходному проективному пространству P_n относительно инволютивного преобразования $\mathfrak{I}$ форм $\omega_{\bar{I}}^{\bar{K}}$ по закону (13); 2) регулярное распределение $\overline{\mathrm{H}(\Pi)} \subset \overline{P}_n$, двойственное исходному, причем его дифференциальные уравнения в тангенциальном репере (15) имеют вид (16), аналогичный уравнениям (2) Н(П)-распределения пространства P_n.*

В разных дифференциальных окрестностях можно построить поля фундаментальных и охваченных геометрических объектов двойственного многообразия $\overline{\mathrm{H}(\Pi)} \subset \overline{P}_n$ используя те же формулы охватов (соответствующие объекты пишутся с черточкой сверху). Построенные поля геометрических объектов определяют внутреннюю геометрию многообразия $\overline{\mathrm{H}(\Pi)} \subset \overline{P}_n$, двойственную геометрии исходного Н(П)-распределения проективного пространства P_n.

2. Двойственная теория имеет место и на оснащенном Н(П)-распределении в P_n. Пусть Н(П)-распределение нормализовано полями квазитензоров ν_n^p, ν_p^0, ν_n^i, ν_i^0, ν_n^α, ν_α^0. Используя соотношения (4), (7), (13) убеждаемся, что функции

$$\overline{\nu}_n^p = -\Lambda_n^{pq} \nu_q^0, \ \overline{\nu}_p^0 = \Lambda_{qp}^n \nu_n^q, \ \overline{\nu}_n^i = -\Lambda_n^{ik} \nu_k^0, \tag{17}$$

$$\bar{\nu}_i^0 = \Lambda_{ki}^n \nu_n^k,\ \bar{\nu}_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta^0,\ \bar{\nu}_\alpha^0 = \Lambda_{\beta\alpha}^n \nu_n^\beta$$

удовлетворяют соответственно дифференциальным уравнениям:

$$\begin{gathered} d\bar{\nu}_n^p + \bar{\nu}_n^s\bar{\omega}_s^p - \bar{\nu}_n^p\bar{\omega}_n^n + \bar{\omega}_n^p = \bar{\nu}_{nK}^p\bar{\omega}_0^K,\ d\bar{\nu}_p^0 - \bar{\nu}_s^0\bar{\omega}_p^s + \bar{\nu}_p^0\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_p^0 = \bar{\nu}_{pK}^0\bar{\omega}_0^K, \\ d\bar{\nu}_n^i + \bar{\nu}_n^k\bar{\omega}_k^i - \bar{\nu}_n^i\bar{\omega}_n^n + \bar{\omega}_n^i = \bar{\nu}_{nK}^i\bar{\omega}_0^K,\ d\bar{\nu}_i^0 - \bar{\nu}_j^0\bar{\omega}_i^j + \bar{\nu}_i^0\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_i^0 = \bar{\nu}_{iK}^0\bar{\omega}_0^K, \\ d\bar{\nu}_n^\alpha - \bar{\nu}_n^\beta\bar{\omega}_\beta^\alpha + \bar{\nu}_n^\alpha\bar{\omega}_n^n + \bar{\omega}_n^\alpha = \bar{\nu}_{nK}^\alpha\bar{\omega}_0^K,\ d\bar{\nu}_\alpha^0 - \bar{\nu}_\beta^0\bar{\omega}_\alpha^\beta + \bar{\nu}_\alpha^0\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_\alpha^0 = \bar{\nu}_{\alpha K}^0\bar{\omega}_0^K. \end{gathered} \tag{18}$$

Таким образом, всякая нормализация Н(П)-распределения индуцирует двойственную ей нормализацию. При этом оснащающие объекты (ν_n^σ, ν_σ^0), ($\bar{\nu}_n^\sigma$, $\bar{\nu}_\sigma^0$) связаны соотношениями (17). Из уравнений (17), (18) непосредственно вытекает

Теорема 2. *Нормализация одного из регулярных полосных распределений* $\mathrm{H}(\Pi) \subset \mathrm{P}_n$ *и* $\overline{\mathrm{H}(\Pi)} \subset \bar{P}_n$ *равносильна нормализации другого, при этом компоненты полей оснащающих объектов связаны соотношениями (17).*

В первых трех дифференциальных окрестностях мы построили (без применения теории двойственности) различные внутренние инвариантные нормализации Н(П)-распределения проективного пространства. Теперь, следуя работе [5], утверждаем: в силу двойственности теории Н(П)-распределения, зная закон охвата объекта нормали первого (второго) рода ν_n^σ (ν_σ^0) любого ассоциированного распределения с данным полосным Н(П)-распределением, можно построить внутренним образом определенную соответствующую нормаль второго (первого) рода ν_σ^0 (ν_n^σ) рассматриваемого ассоциированного распределения по следующей схеме. Построим охват квазитензора $\bar{\nu}_n^\sigma$ ($\bar{\nu}_\sigma^0$) двойственного образа $\overline{\mathrm{H}(\Pi)} \subset \bar{P}_n$, аналогичный охвату ν_n^σ (ν_σ^0), после чего по закону (17) найдем соответствующую нормаль ν_σ^0 (ν_n^σ). В этом случае будем говорить [5], что поля нормалей ν_n^σ и ν_σ^0 двойственны друг другу по отношению к инволютивному преобразованию $\mathfrak{J}$(13).

Список литературы

1. *Шейдорова Н.М.* Задание двухсоставных распределений $\mathrm{H}_m^r \subset \mathrm{P}_n$ // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград, 1985. №16. С.110 – 112.

2. *Шейдорова Н.М.* Поле гиперплоскостей, ассоциированное с М(Λ)-распределением проективного пространства // Там же, 1986. №17. С.103 – 105.

3. *Столяров А.В.* Проективно-дифференциальная геометрия регулярного гиперполосного распределения m-мерных линейных элементов // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1975. Т.7. С.117 – 151.

4. *Попов Ю.И.* Основы теории трехсоставных распределений проективного пространства: Монография. СПб., 1992.

5. *Столяров А.В.* Двойственная теория оснащенных многообразий: Монография. Чебоксары, 1992.

N. Eliseeva

DUAL IMAGE H(П)-DISTRIBUTION IN THE PROJECTIVE SPACE

The giving for the regular H(П)-distribution of the projective space is produced in the 1-st order frame. Its dual image is constructed concerning some involutory transformation for structure forms of the projective space.

УДК 514.75.

О.М. Жовтенко

(*Калининградский государственный университет*)

ВЫРОЖДЕННЫЕ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ В СВЯЗНОСТЯХ, ИНДУЦИРОВАННЫХ ОСНАЩЕНИЕМ БОРТОЛОТТИ КОНГРУЭНЦИИ ПЛОСКОСТЕЙ

Рассмотрено оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей в проективном пространстве. Приведены условия совпадения индуцированных групповых связностей двух типов. Дана геометрическая интерпретация совпадения групповых связностей. Описаны параллельные перенесения в связностях обоих типов, которые оказались свободно и связанно вырожденными.

Проективное пространство P_n отнесено к подвижному реперу $\{A, A_J\}$, деривационные формулы которого имеют вид:

$$dA=\theta A+\omega^I A_I,\ dA_I=\theta A_I+\omega_I^J A_J+\omega_I A,$$

причем формы ω^I, ω_J^I, ω_I удовлетворяют структурным уравнениям проективной группы GP(n):

$$D\omega^I=\omega^J\wedge\omega_J^I,\ D\omega_I=\omega_I^J\wedge\omega_J,\ D\omega_I^J=\omega_I^K\wedge\omega_K^J+\delta_I^J\omega_K\wedge\omega^K+\omega_I\wedge\omega^J\ (I, J, K=\overline{1,n}).$$

В проективном пространстве P_n рассмотрено (n-m)-мерное семейство m-мерных плоскостей L_m – конгруэнция плоскостей B_{n-m} [1]. Произведена специализация подвижного репера $\{A, A_a, A_\alpha\}$: вершины A, A_a помещены на плоскость L_m. Над семейством B_{n-m} построено главное расслоение $G(B_{n-m})$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G плоскости L_m. Расслоение $G(B_{n-m})$ содержит подрасслоение проективных реперов $P(B_{n-m})$ с типовым слоем – проективной группой $GP(m)\subset G\subset GP(n)$, действующей на плоскости L_m. Групповая связность в главном расслоении $G(B_{n-m})$ задана объектом связности $\Gamma=\{\Gamma_\alpha^a,\Gamma_{b\alpha}^a,\Gamma_{a\alpha},\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha,\Gamma_{\alpha\beta}^a,\Gamma_{\alpha\beta}\}$.

Произведено оснащение Бортолотти конгруэнции плоскостей, состоящее в присоединении к каждой m-мерной плоскости L_m (n-m-1)-мерной плоскости P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L_m. Плоскость P_{n-m-1} определена совокупностью точек $B_\alpha=A_\alpha+\lambda_\alpha^a A_a+\lambda_\alpha A$. В работе [1] доказано, что оснащение