и $\widetilde{\Omega}^4_1 = -a^1_{21}\omega^1,\ \widetilde{\Omega}^4_2 = a^2_{32}\omega^2,\ \widetilde{\Omega}^4_3 = 0.$

Первое семейство линий сети $\Sigma_3(F^2_3)$ ортогонально к остальным семействам линий этой сети. Второе семейство линий – геодезическое на гиперповерхности (F^2_3), третье семейство является семейством прямолинейных образующих гиперповерхности (F^2_3). Гиперповерхность (F^2_3) – тангенциально вырожденная поверхность ранга 2. В направлении поля $\vec{\tau}_1$ она расслаивается на однопараметрическое семейство подповерхностей коразмерности 1. Первое и третье семейства линий сети $\Sigma_3(F^2_3)$ являются семействами линий кривизны относительно нормали $[F^2_3, \vec{\tau}_4]$. Сеть $\Sigma_3(F^2_3)$ имеет на касательных к своим линиям 6 фокусов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базылев В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. – Лит. мат. сб., 1966, 6, № 4, с. 475-491.

2. Смирнов Р.В. Преобразования Лапласа p-сопряженных систем. – ДАН СССР, 1950, 71, № 3, с. 437-439.

3. Тихонов В.А. Ступенчато-чебышевские сети на многомерных поверхностях аффинного пространства. – В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1976, вып. 7, с. 119-129.

4. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана. М., Гостехиздат, 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 12 1981

В.А. Трупов

ОБ ИНВАРИАНТАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Строятся объекты, связанные с дифференциальным уравнением в частных производных второго порядка, инвариантные относительно преобразований линейной группы.

Рассмотрим пространство

$$V_m = R^1 \times V_n \times V^*_n \times S^2(V^*_n),\quad m = \frac{n^2+5n+2}{2},$$

где V_n – векторное пространство, V^*_n – пространство линейных форм на V_n, а $S^2(V^*_n)$ – пространство ковариантных симметрических тензоров. Если $W = (e, e_i, e^i, e^i \otimes e^j)$ – базис пространства V_m, а (u, x^i, u_i, u_{ij}) – координаты точки $x \in V_m$ в этом базисе, то координаты $(\bar{u}, \bar{x}^i, \bar{u}_i, \bar{u}_{ij})$ этой же точки в базисе $W' = (e', e'_i, e'^i, e'^i \otimes e'^j)$, где

$$e' = e,\ e'_i = \overset{*}{g}{}^j_i e_j,\ e'^i = g^i_j e^j,\ e'^i \otimes e'^j = g^i_k g^j_m e^k \otimes e^m, \qquad (1)$$

g^i_j, $\overset{*}{g}{}^i_j$, – координаты $g, g^* \in GL(n)$, $g \cdot \overset{*}{g} = e$ связаны формулами

$$\bar{u} = u,\ \bar{x}^i = g^i_j x^j,\ \bar{u}_j = \overset{*}{g}{}^i_j u_i,\ \bar{u}_{ij} = \overset{*}{g}{}^k_i \overset{*}{g}{}^m_j u_{km}. \qquad (2)$$

Легко видеть, что закон преобразования величин (u, u_i, u_{ij}) совпадает с законом преобразования координат струй [1] C^τ $(\tau > 2)$ отображения $f: V_n \to R^1$.

Дифференцируя (2) по всем переменным, входящим в эту систему, получаем дифференциальную форму закона преобразования координат точки: $x \in V_m$.

$$dx^i + \omega^i_j x^j = \overset{*}{g}{}^i_j d\bar{x}^j,\qquad du_i - u_j \omega^j_i = d\bar{u}_j g^j_i,$$

$$d u_{ij} - u_{ik}\,\omega^k_j - u_{kj}\,\omega^k_j = d\bar{u}_{km}\, g^k_i\, g^m_j, \quad d\bar{u} = du. \tag{3}$$

В формулах (3) формы ω^j_i являются инвариантными формами группы $GL(n)$ и имеют вид:

$$\omega^j_i = \overset{*}{g}{}^j_k\, dg^k_i. \tag{4}$$

Заметим, что формулы(3) можно получить из соотношения $d\bar{u} = du$ применением оператора формального дифференцирования [2], который в рассматриваемом случае записывается так: $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.
Такой оператор на всем пространстве V_m представим в виде трех операторов:

$$\partial^{\#}_i = \frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \partial^{\# j} = \frac{\partial}{\partial u_j}, \quad \partial^{\# ij} = \frac{\partial}{\partial u_{\overline{ij}}}. \tag{5}$$

Применяя оператор(5) к системе форм

$$\theta^i = \overset{*}{g}{}^i_j\, d\bar{x}^j, \quad \theta_i = d\bar{u}_j\, g^j_i, \quad \theta_{ij} = d\bar{u}_{km}\, g^k_i\, g^m_j, \tag{6}$$

и, дифференцируя внешним образом, получаем структурные уравнения пространства V_m:

$$\mathcal{D}\theta^i = \theta^j \wedge \omega^i_j, \quad \mathcal{D}\theta_i = \omega^j_i \wedge \theta_j,$$
$$\mathcal{D}\theta_{ij} = \theta^{km}_{ij} \wedge \theta_{km}, \quad \mathcal{D}\theta^{km}_{ij} = \theta^{j_1 j_2}_{ij} \wedge \theta^{km}_{j_1 j_2}, \tag{7}$$

где $\mathcal{D}$ -оператор внешнего дифференцирования,

$$\theta^{km}_{ij} = \delta^k_i\, \omega^m_j + \delta^m_j\, \omega^k_i.$$

Пусть в базисе W' задано уравнение

$$f(\bar{x}^i, \bar{u}, \bar{u}_i, \bar{u}_{ij}) = 0.$$

В дальнейшем будем работать только в базисе W, поэтому опуская черту над переменными$(\bar{x}^i, \bar{u}, \bar{u}_i, \bar{u}_{ij})$ и их дифференциалами в системе(6), последнее уравнение запишем так:

$$f(x^i, u, u_i, u_{ij}) = 0, \tag{8}$$

а из системы (2) получим выражение дифференциалов координат точки $x \in V_m$, через введенные формы θ^i, θ_i, θ_{ij}:

$$dx^i = g^i_j\, \theta^j, \quad du_j = \overset{*}{g}{}^i_j\, \theta_i, \quad du_{ij} = \overset{*}{g}{}^k_i\, \overset{*}{g}{}^m_j\, \theta_{km}. \tag{9}$$

Положим

$$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad f^i = \frac{\partial f}{\partial u_i}, \quad f^{\overline{ij}} = \frac{\partial f}{\partial u_{ij}}, \quad f' = \frac{\partial f}{\partial u}. \tag{10}$$

Дифференцируя уравнение (8) по всем переменным и учитывая (9) и (10), получаем дифференциальную форму этого уравнения:

$$du = a_i\, \theta^i + a^i\, \theta_i + a^{\overline{ij}}\, \theta_{ij}, \tag{11}$$

где

$$a_i = -(f_j\, g^j_i) : f'; \quad a^i = -(f^j\, \overset{*}{g}{}^i_j) : f'; \quad a^{\overline{ij}} = -(f^{km}\, \overset{*}{g}{}^i_k\, \overset{*}{g}{}^j_m) : f'. \tag{12}$$

В формулах (11) и (12) предполагается, что $f' \neq 0$, т.е. искомая функция u входит в уравнение (8). Система величин (a_i, a^i, a^{ij}) образует внутренний фундаментальный объект первого порядка этого уравнения [3].

Дифференцируя (11) внешним образом и разрешая по лемме Картана, получаем систему дифференциальных уравнений фундаментального объекта первого порядка:

$$\Delta a_i = a_{ij}\, \theta^j + a^j_i\, \theta_j + a^{\overline{jk}}_i\, \theta_{jk},$$
$$\Delta a^i = a^i_j\, \theta^j + a^{ij}\, \theta_j + a^{i\overline{jk}}\, \theta_{jk}, \tag{13}$$
$$\Delta a^{\overline{ij}} = a^{\overline{ij}}_k\, \theta^k + a^{ij\overline{k}}\, \theta_k + a^{\overline{ij}\,\overline{km}}\, \theta_{km},$$

где

$$\Delta a_i = d a_i - a_j\, \omega^j_i, \quad \Delta a^i = da^i + a^j\, \omega^i_j,$$
$$\Delta a^{\overline{ij}} = d a^{\overline{ij}} + a^{\overline{ik}}\, \omega^j_k + a^{\overline{kj}}\, \omega^i_k, \tag{14}$$

а компоненты, удовлетворяющие условиям $a_{ij} = a_{ji}$, $a^{i\overline{jk}} = a^{\overline{jk}i}$, $a^{\overline{ij}\,\overline{km}} = a^{\overline{km}\,\overline{ij}}$, выражаются через. частные производные функции f следующим образом:

$$a_{ij}=(b_{j_1j_2}\,g^{j_1}_i\,g^{j_2}_j):(f')^2;\quad a^{\overline{ij}\,\overline{km}}=(b^{\overline{j_1j_2}\,\overline{k_1k_2}}\,\overset{*}{g}{}^{i}_{j_1}\,\overset{*}{g}{}^{j}_{j_2}\,\overset{*}{g}{}^{k}_{k_1}\,\overset{*}{g}{}^{m}_{k_2}):(f')^2,$$

$$a^{\overline{jk}}_i=(b^{\overline{j_1j_2}}_{i_1}\,g^{i_1}_i\,\overset{*}{g}{}^{j}_{j_1}\,\overset{*}{g}{}^{k}_{j_2}):(f')^2;\quad a^{ji}=(b^{j_1j_2}\,\overset{*}{g}{}^{j}_{j_1}\,\overset{*}{g}{}^{i}_{j_2}):(f')^2, \tag{15}$$

$$a^{i\overline{jk}}=(b^{i_1\overline{j_1j_2}}\,\overset{*}{g}{}^{i}_{i_1}\,\overset{*}{g}{}^{j}_{j_1}\,\overset{*}{g}{}^{k}_{j_2}):(f')^2,$$

$$a^i_j=(b^{j_1}_{j_2}\,g^{j_2}_j\,\overset{*}{g}{}^{i}_{j_1}):(f')^2.$$

$$\begin{aligned}
b_{ij}&=(f_i f_j)'-(f'' f_i f_j):f'-f_{ij}f',\\
b^j_i&=(f^j f_i)'-(f'' f^j f_i):f'-f^j_i f',\\
b^{\overline{jk}}_i&=(f^{\overline{jk}} f_i)'-(f'' f^{\overline{jk}} f_i):f'-f^{\overline{jk}}_i f',\\
b^{ij}&=(f^i f^j)'-(f'' f' f^j):f'-f^{ij}f',\\
b^{i\overline{jk}}&=(f^i f^{\overline{jk}})'-(f'' f^i f^{\overline{jk}}):f'-f^{i\overline{jk}}f',\\
b^{\overline{ij}\,km}&=(f^{\overline{ij}} f^{\overline{km}})'-(f'' f^{\overline{ij}} f^{\overline{km}}):f'-f^{\overline{ij}\,\overline{km}}f'.
\end{aligned} \tag{16}$$

Дифференциальные уравнения фундаментального объекта второго порядка получается дифференцированием системы (13):

$$\begin{aligned}
\Delta a_{ij}&=a_{ijk}\theta^k+a^k_{ij}\theta_k+a^{\overline{km}}_{ij}\theta_{km},\\
\Delta a^j_i&=a^j_{ik}\theta^k+a^{jk}_i\theta_k+a^{j\overline{km}}_i\theta_{km},\\
\Delta a^{\overline{jk}}_i&=a^{\overline{jk}}_{im}\theta^m+a^{\overline{jk}m}_i\theta_m+a^{\overline{jk}m_1m_2}_i\theta_{m_1m_2},\\
\Delta a^{j\overline{i_1i_2}}&=a^{j\overline{i_1i_2}}_k\theta^k+a^{j\overline{i_1i_2}k}\theta_k+a^{j\overline{i_1i_2}\,\overline{k_1k_2}}\theta_{\overline{k_1k_2}},\\
\Delta a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{j_1j_2}}&=a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{j_1j_2}}_k\theta^k+a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{j_1j_2}k}\theta_k+a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{j_1j_2}\,\overline{k_1k_2}}\theta_{k_1k_2},
\end{aligned}$$

где левые части имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Delta a_{ij}&=da_{ij}-a_{kj}\omega^k_j-a_{ik}\omega^k_j,\\
\Delta a^j_i&=da^j_i-a^j_k\omega^k_i+a^k_i\omega^j_k,\\
\Delta a^{\overline{j_1j_2}}_i&=da^{\overline{j_1j_2}}_i-a^{\overline{j_1j_2}}_k\omega^k_i+a^{\overline{km}}_i\theta^{j_1j_2}_{km},\\
\Delta a^{i\overline{j_1j_2}}&=da^{i\overline{j_1j_2}}+a^{k\overline{j_1j_2}}\omega^i_k+a^{i\overline{km}}\theta^{j_1j_2}_{km},\\
\Delta a^{j_1j_2}&=da^{j_1j_2}+a^{kj_2}\omega^{j_1}_k+a^{j_1k}\omega^{j_2}_k,\\
\Delta a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{j_1j_2}}&=da^{\overline{i_1i}\,\overline{j_1j}}+a^{\overline{km}\,\overline{j_1j_2}}\theta^{i_1i_2}_{km}+a^{\overline{i_1i_2}\,\overline{km}}\theta^{j_1j_2}_{km}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из (14) и (17) следует, что компонентами внутреннего фундаментального объекта второго порядка дифференциального уравнения (8) являются компоненты соответствующих тензоров. Заметим, что этот же результат следует из (12) и (15).

Введем следующие системы величин:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_1=a_i a^i,\quad \mathcal{J}_2=a_i a_j a^{ij},\quad \mathcal{J}_3=a_i a^j a^i_j,\\
&\mathcal{J}_4=\det\|a^{ij}\|,\quad \mathcal{J}_5=\det\|a_{ij}\|,\\
&\mathcal{J}_6=\det\|a^i_j\|,\quad \mathcal{J}_7=\det\|a^i a^{jk}_i\|.
\end{aligned} \tag{18}$$

Из (13), (14), (17) получаем систему дифференциальных уравнений для введенных величин:

$$\begin{aligned}
&d\mathcal{J}_1\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km}),\quad d\mathcal{J}_2\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{ij}),\\
&d\mathcal{J}_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km}),\quad d\mathcal{J}_4+2\mathcal{J}_4\omega^i_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km}),\\
&d\mathcal{J}_5-2\mathcal{J}_5\omega^i_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km});\quad d\mathcal{J}_6\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km}),\\
&d\mathcal{J}_7+\mathcal{J}_7\omega^i_i\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \theta^i;\ \theta_j;\ \theta_{km}).
\end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) следует, что величины

$$\mathcal{J}_1=(f_i f^j):(f')^2,\quad \mathcal{J}_2=-(f_i f_j f^{\overline{ij}}):(f')^3,$$

$$\mathcal{J}_3=(b^i_j f_i f^j):(f')^4,\quad \mathcal{J}_6=\det\|b^j_i\|:(f')^{2n}. \tag{20}$$

являются инвариантами, а величины

$$\mathcal{J}_4=(-1)^n\det\|f^{\overline{ij}}\|\cdot(\det\|\overset{\kappa}{g}{}^{\kappa}_m\|):(f')^2,$$

$$\mathcal{J}_5=(\det\|g^i_j\|)^2\cdot(\det\|b_{ij}\|):(f')^{2n},$$

$$\mathcal{J}_7=(-1)^n(\det\|\overset{\kappa}{g}{}^i_j\|)^2(\det\|b_i^{\overline{j_1 j_2}}f^i\|):(f')^{3n} \tag{21}$$

относительными инвариантами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Близникас В.И. О секущих поверхностях пространств опорных элементов - Тр.геометр.семинара, 1975 вып.8, с 16-40.

2. Восилюс Р.В. Формальное дифференцирование в пространствах геометрических объектов. - Лит.матем.сб., 1975, т.XV, №4, с.17-39

3. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. - Тр.Московск.матем.об-ва, т.2, 1953, с.275-382.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.12 1981

Т.П.Ф у н т и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ, ОБРАЗОВАННЫЕ ЭЛЛИПСОМ И ПРЯМОЙ

В работе исследуются в трехмерном эквиаффинном пространстве конгруэнции (CL) пар фигур, порожденных эллипсом и прямой L, причем центры эллипсов C инцидентны неподвижной точке. Для одного частного класса таких конгруэнций получено безынтегральное представление.

§ I. Конгруэнции $(CL)^1$

Поставим в соответствие каждой паре фигур $\{C,L\}$ канонический репер $R=\{A,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ следующим образом: вершину A репера совместим с точкой пересечения прямой L и плоскости соответствующего эллипса C, а конец вектора $\vec{e}_1$ -с центром эллипса, вектор $\vec{e}_3$ направим по прямой L, а вектор $\vec{e}_2$ -по направлению, сопряженному с направлением вектора $\vec{e}_1$ относительно эллипса C и пронормируем его таким образом, чтобы точка $\vec{N}=\vec{A}+\vec{e}_1+\vec{e}_2$ была инцидентна эллипсу.

Уравнения эллипса C в репере R имеют вид:

$$a^2(x^1-1)^2+(x^2)^2-1=0,\quad x^3=0.$$

Рассмотрим конгруэнции (CL), для которых выполняются следующие условия: 1/ $a=1$; 2/касательные к координатным линиям $\omega^2=0$ на поверхности (A_2) $(\vec{A}_\alpha=\vec{A}+\vec{e}_\alpha,\ \alpha=1,2,3)$ параллельны соответствующим плоскостям $(A,\vec{e}_1,\vec{e}_3)$: 3/все эллипсы C инцидентны инвариантной квадрике; 4/индикатриса вектора $\vec{e}_2$ при $\omega^2=0$ является точкой.