ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I8 1987

УДК 5I4.75

РАССЛОЯЕМЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(QC)_{2,1}$

Е.В.Скрыдлова
(Калининградский университет)

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматриваются вырожденные [1] конгруэнции $(QC)_{2,1}$, порожденные квадрикой Q, описывающей двупараметрическое многообразие, и инцидентной ей коникой C, описывающей однопараметрическое семейство. Изучен класс таких конгруэнций, обладающий специальными свойствами ассоциированных геометрических образов.

Отнесем проективное пространство P_3 к подвижному реперу $R=\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, в котором вершина A_0 совпадает с полюсом плоскости коники C относительно квадрики Q, вершины A_1 и A_2 являются точками пересечения коники C с касательной плоскостью к поверхности (A_0) в точке A_0, а вершина A_3 полярно сопряжена прямой A_1A_2 относительно коники C. Уравнения квадрики Q и коники C относительно построенного репера R с учетом некоторой нормировки вершин примут соответственно вид

$$(x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,$$

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^0 = 0.$$

Так как в конгруэнциях $(QC)_{2,1}$ коника C описывает однопараметрическое семейство, а квадрика Q описывает двупараметрическое многообразие (конгруэнцию), то должны выполняться следующие условия:

$$\operatorname{rang}\{\omega_1^2, \omega_2^1, \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3, \omega_1^3-\omega_3^2, \omega_2^3-\omega_3^1, \omega_1^0, \omega_2^0, \omega_3^0\}=1,$$

$$\operatorname{rang}\{\omega_1^2, \omega_2^1, \omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_3^3, \omega_1^3-\omega_3^2, \omega_2^3-\omega_3^1, \omega_3^0, \omega_0^0-\omega_3^3, \omega_1^0-\omega_0^2, \omega_2^0-\omega_0^1\}=2,$$

где ω_α^β $(\alpha,\beta = 0,1,2,3)$ – линейные дифференциальные формы, удовлетворяющие уравнениям структуры проективного пространства и условию эквипроективности.

Доказано, что конгруэнции $(QC)_{2,1}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.

Рассмотрим ассоциированную с конгруэнцией $(QC)_{2,1}$ конгруэнцию коник C_0, где C_0 – линия пересечения квадрики Q с касательной плоскостью к поверхности (A_0) в точке A_0.

Определение. Назовем конгруэнцию $(QC)_{2,1}$ расслояемой, если существует расслоение от конгруэнции коник C_0 к прямолинейной конгруэнции (A_0A_3), а асимптотическая сеть на поверхности (A_0) огибается прямыми A_0A_1 и A_0A_2.

Доказано, что расслояемые конгруэнции $(QC)_{2,1}$ определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа

$$\omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = b\omega^j, \quad \omega_1^1 + \omega_2^2 - 2\omega_0^0 = 0, \quad \omega_0^3 = 0,$$

$$\omega_3^0 = \lambda(\omega^1-\omega^2), \quad b(\omega_0^0-\omega_3^3) = \omega_3^0, \quad \omega_i^0 = \frac{b^2-1}{2}(\omega^i-\omega^j),$$

$$\omega_3^i - \omega_j^3 = \frac{1-b^2}{2b}(\omega^i-\omega^j), \quad \omega_1^1-\omega_2^2 = \frac{2\lambda}{1-b^2}(\omega_1^3+\omega_2^3),$$

$$db = \omega_3^0, \quad d\lambda = \Lambda(\omega^1-\omega^2) \qquad (\lambda \neq 0),$$

где формы $\omega_0^i \stackrel{def}{=} \omega^i$ выбраны в качестве базисных, а функция Λ определяется конечным соотношением

$$4b\Lambda(1-b^2) + 4\lambda^2 + 8\lambda^2 b^2 + 2(1-b^2) = 0.$$

Здесь и в дальнейшем $i,j=1,2$, причем $i \neq j$.

Доказаны следующие геометрические свойства расслояемых конгруэнций $(QC)_{2,1}$.

Теорема 1. Вершины A_i совпадают с характеристическими точками граней $(A_0A_iA_3)$. Торсы прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответствуют. Фокусы F_1 и F_2 луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически разделяют вершины A_1 и A_2.

Теорема 2. Прямолинейная конгруэнция (A_0A_3) односторонне расслояема к прямолинейной конгруэнции (A_1A_2).

7 Зак.1291

Т е о р е м а 3. Вершины A_1 и A_2 являются фокальными точками коники C_0. Остальные четыре фокуса коники C_0 совпадают с точками пересечения этой коники с прямыми F_1A_2 и F_2A_3.

Т е о р е м а 4. Поверхности $(A_0), (A_1), (A_2)$ являются одной и той же инвариантной квадрикой, содержащей однопараметрическое семейство (C) коник C и определяемой уравнением

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 + \frac{2}{b}x^0x^3 = 0$$

Т е о р е м а 5. Плоскости коник C образуют пучок.

С л е д с т в и е. Таким образом, однопараметрическое семейство (C) коник C образовано сечениями инвариантной квадрики пучком плоскостей.

Т е о р е м а 6. Характеристическое многообразие квадрики Q, описывающей конгруэнцию (Q), содержит прямую A_1A_2, характеристику плоскости коники C и конику, лежащую в плоскости $(A_0F_2A_3)$.

С л е д с т в и е. Вершины A_1 и A_2, а также точки пересечения коники C с характеристикой ее плоскости являются фокальными точками квадрики Q.

Оставшиеся четыре фокальные точки квадрики Q определяются системой уравнений

$$x^1 + x^2 = 0, \quad (x^0)^2 + (x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0,$$

$$\lambda(x^1)^2 - b^3x^0x^1 - b\lambda x^0x^3 + (b^2-1)x^1x^3 = 0$$

и геометрически не охарактеризованы.

Библиографический список

1. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в проективном пространстве // Дифференциальная геометрия многообразий фигур: Сб.науч.тр./Калинингр.ун-т. Калининград, 1973. Вып.3. С.41-49.

УДК 514.75

К ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ГИПЕРПОВЕРХНОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ ПРОЕКТИВНОЙ СВЯЗНОСТИ НУЛЕВОГО КРУЧЕНИЯ

П.А.Т а д е е в
(Киевский университет)

Г.Ф.Лаптев в работе [1] для гиперповерхности в пространстве проективной связности с кривизной и кручением построил геометрические объекты, в частности, тензоры и инварианты, обобщающие основные понятия проективно дифференциальной геометрии обычной гиперповерхности. При этом он указал только один из возможных способов их построения.

В настоящей работе для гиперповерхности в пространстве проективной связности без кручения приводится "расщепление" [2] геометрических объектов, обобщающих основные понятия проективно дифференциальной геометрии гиперповерхности. При этом мы ограничиваемся указанием только некоторых из возможных расщеплений. В качестве примера для поверхности в трехмерном пространстве проективной связности приведены геометрические интерпретации двух, из построенных ниже аналитическим путем, нормалей Фубини [3].

На протяжении всей работы будем пользоваться объектами, которые были построены Г.Ф.Лаптевым при исследовании гиперповерхности проективного пространства [4] и пространства проективной связности [1], а также результатами работы [5] А.Швеца, не ссылаясь каждый раз на это. Обозначения и терминология совпадают с принятыми в упомянутых выше работах.

1. Рассмотрим пространство проективной связности без кручения $P_{N,N}$ с N-мерной базой и N-мерными слоями P_N, определяемое формами $\omega_J^{\mathcal{J}}$, которые подчинены следующим структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega_J^{\mathcal{J}} = [\omega_J^K \omega_K^{\mathcal{J}}] + R^{\mathcal{J}}_{Jpq}[\omega^p\omega^q] \quad (J, \mathcal{J}, K = \overline{0,N};\ p,q = \overline{1,N}),$$

$$R^{\mathcal{J}}_{Jpq} = -R^{\mathcal{J}}_{Jqp}, \quad R^{\mathcal{J}}_{0pq} = 0, \quad \omega_J^J = 0.$$