УДК 514.756.2

А. В. Столяров

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

Об одном дополнении к результату М. А. Акивиса

Приведено дополнение к результату М. А. Акивиса относительно семейства циклид Дарбу, имеющих с гиперповерхностью конформного пространства соприкосновение 2-го порядка.

***Ключевые слова*:** конформное пространство, гиперквадрика Дарбу, полное оснащение гиперповерхности, циклида Дарбу.

Индексы принимают следующие значения:

$$\lambda, \mu, \rho = \overline{0, n+1};\ I, K, L = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{K}, \bar{L} = \overline{1, n+1};$$
$$i, j, k = \overline{1, n-1};\ \bar{i}, \bar{j}, \bar{k} = \overline{0, n-1};\ a, b, c = \overline{0, n-1}, n+1.$$

1. В докторской диссертации Акивиса М. А. «Конформно-дифференциальная геометрия многомерных поверхностей» (Москва, 1964) найдено семейство циклид Дарбу, имеющих с гиперповерхностью V_{n-1} конформного пространства C_n соприкосновение второго порядка. Но следует при этом заметить, что найденное семейство автору не удалось построить внутренним образом, то есть не все коэффициенты уравнения соприкасающейся циклиды оказались охваченными компонентами фундаментальных геометрических объектов гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$; он пишет: «…аналогичным путем могли бы быть найдены и остальные коэффициенты уравнения соприкасающейся циклиды. Однако их отыскание приводит к довольно громоздким выкладкам». Настоящую статью мы и посвящаем устранению этого пробела в дифференциальной геометрии гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

2. Рассмотрим n-мерное конформное пространство C_n; образующими элементами пространства C_n являются гиперсферы, гиперплоскости и точки евклидова пространства E_n с одной присоединенной к нему несобственной точкой, причем гиперплоскости считаются гиперсферами, проходящими через несобственную точку; точки пространства E_n отождествляются с гиперсферами радиуса R = 0. Известно [1], что существует отображение пространства C_n на проективное пространство P_{n+1}, при котором:

1) образы всех точек пространства C_n заполняют овальную гиперквадрику $Q_n^2 \subset P_{n+1}$ (абсолют пространства P_{n+1});

2) образом гиперсферы действительного радиуса выступает точка пространства P_{n+1}, находящаяся вне гиперквадрики Q_n^2; образом гиперсферы мнимого радиуса — точка пространства P_{n+1}, находящаяся внутри гипервадрики Q_n^2.

Такое отображение элементов конформного пространства C_n в точки проективного пространства P_{n+1} называется отображением Дарбу, а сама гиперквадрика $Q_n^2 \subset P_{n+1}$ — гиперквадрикой Дарбу.

Так как в пространстве P_{n+1} система из $n+2$ линейно независимых аналитических точек A_0, A_K, A_{n+1} составляет проективный репер, то репером в пространстве C_n называется система, состоящая из $n+2$ линейно независимых гиперсфер A_0, A_K, A_{n+1}.

Отнесем конформное пространство C_n к полуизотропному реперу $R = \{A_\lambda\}$ [2]: в проективном пространстве P_{n+1} n вершин A_K лежат в $(n-1)$-мерной плоскости Π_{n-1}, не пересекающей абсолют Q_n^2; через Π_{n-1} проведем две гиперплоскости Π_n и Π'_n, касательные к абсолюту; за вершины A_0 и A_{n+1} проективного репера $\{A_\lambda\}$ в P_{n+1} принимаем точки касания этих гиперплоскостей с гиперквадрикой Дарбу.

В случае полуизотропного репера вершинам A_0 и A_{n+1} в конформном пространстве C_n соответствуют точки A_0 и A_{n+1}, а вершинам A_K — линейно независимые гиперсферы A_K, проходящие через точки A_0 и A_{n+1}.

Если скалярные произведения $(A_\lambda A_\mu)$ обозначить через $g_{\lambda\mu} (\equiv g_{\mu\lambda})$ и выбрать нормировку точек A_0 и A_{n+1} так, чтобы $(A_0 A_{n+1}) = 1$, то справедливы следующие равенства: $g_{00} = g_{0K} = g_{K,n+1} = g_{n+1,n+1} = 0, g_{0,n+1} = 1$.

Любую гиперсферу $P \in C_n$ можно разложить по элементам полуизотропного репера $R = \{A_\lambda\}$ в виде

$$P = x^0 A_0 + x^K A_K + x^{n+1} A_{n+1};$$

если P — точка пространства C_n, то ее координаты в силу $(PP) = 0$ удовлетворяют уравнению

$$(PP) \equiv g_{IK} x^I x^K + 2x^0 x^{n+1} = 0. \qquad (1)$$

Уравнение (1) есть уравнение гиперквадрики Дарбу $Q_n^2 \subset \mathrm{P}_{n+1}$ в проективном репере $\{\mathrm{A}_\lambda\}$, соответствующем полуизотопному реперу $R = \{A_\lambda\}$.

При бесконечно малом конформном преобразовании элементы конформного репера $R = \{A_\lambda\}$ получают бесконечно малые приращения, главную часть которых определяют дифференциалы dA_λ, являющиеся гиперсферами:

$$dA_\lambda = \omega_\lambda^\mu A_\mu, \qquad (2)$$

где ω_λ^μ — дифференциальные формы Пфаффа от параметров группы L конформных преобразований. При этом число линейно независимых форм ω_λ^μ равно числу независимых параметров этой группы; все линейные зависимости, которым удовлетворяют формы ω_λ^μ, имеют вид

$$\begin{aligned} &\omega_0^{n+1} = \omega_{n+1}^0 = 0, \omega_0^0 +_{n+1}^{n+1} = 0, \omega_I^0 + g_{IK}\omega_{n+1}^K = 0, \\ &\omega_I^{n+1} + g_{IK}\omega_0^K = 0, dg_{IL} - g_{IK}\omega_L^K - g_{KL}\omega_I^K = 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

Следовательно, число независимых параметров группы L конформных преобразований равно $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$. Уравнения (3) из группы проективных преобразований пространства P_{n+1} выделяют стационарную подгруппу гиперквадрики Дарбу (1), изоморфную группе конформных преобразований пространства C_n.

Кроме уравнений (3) формы Пфаффа ω_λ^μ удовлетворяют уравнениям структуры конформного пространства C_n: $D\omega_\lambda^\mu = \omega_\lambda^\rho \wedge \omega_\rho^\mu$, которые являются условиями полной интегрируемости системы уравнений (2).

3. В конформном пространстве C_n рассмотрим гиперповерхность V_{n-1}, отнесенную к полуизотропному реперу первого порядка; дифференциальное уравнение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ [1; 4] в этом репере имеет вид

$$\omega_0^n = 0. \tag{4}$$

Продолжая уравнение (4), находим

$$\begin{gathered} \omega_i^n = \Lambda_{ij}^n \omega_0^j,\ \Lambda_{[ij]}^n = 0; \\ \nabla\Lambda_{ij}^n + \Lambda_{ij}^n \omega_0^0 - g_{ij}\omega_{n+1}^n = \Lambda_{ijk}^n \omega_0^k,\ \Lambda_{i[jk]}^n = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Репер первого порядка частично специализируем требованием

$$g_{in} = 0. \tag{6}$$

Геометрически последнее означает, что «касательная плоскость» $T_{n-1}(A_0)$ гиперповерхности V_{n-1} в точке $A_0 \subset V_{n-1}$, которая есть $(n-1)$-параметрическая связка гиперсфер $P = \xi^i A_i + \xi^0 A_0$ с центром в точке A_0, и пучок соприкасающихся в точке $A_0 \subset V_{n-1}$ гиперсфер $Q = \eta^n A_n + \eta^0 A_0$ взаимно ортогональны: $(PQ) = 0$.

В этом полуизотропном полуортогональном репере матрица $\left\| g_{\lambda\mu} \right\|$ имеет строение

$$\|g_{\lambda\mu}\| = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & g_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{nn} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, g_{\lambda\mu} = g_{\mu\lambda} ,$$

где метрический тензор g_{ij} и относительный инвариант g_{nn} являются невырожденными и в силу (3_6), (6) удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered} dg_{ij} - g_{ik}\omega_j^k - g_{kj}\omega_i^k = 0, g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j , dg^{ij} + g^{ik}\omega_k^j + g^{kj}\omega_k^i = 0, \\ g_{nn}g^{nn} = 1, d\ln g_{nn} - 2\omega_n^n = 0, d\ln g^{nn} + 2\omega_n^n = 0. \end{gathered} \tag{7}$$

В полуортогональном репере первого порядка справедливо

$$\omega_n^i = \Lambda_{nk}^i \omega_0^k . \tag{8}$$

Каждая из систем функций $\{\Lambda_{ij}^n, g_{ij}\}, \{\Lambda_{nk}^i\}$ на гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ образует геометрический объект второго порядка. Из дифференциальных уравнений (3_6) для равенств (6) в силу выражений (5), (8) находим

$$g_{ik}\Lambda_{nj}^k + g_{nn}\Lambda_{ij}^n = 0. \tag{9}$$

Замыкая уравнение (7_5), получим

$$\omega_n^k \wedge \omega_k^n = 0, \text{ то есть } \Lambda_{n[s}^k \Lambda_{t]k}^n = 0. \tag{10}$$

В случае гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ в предположении невырожденности симметричного тензора a_{ij}^n :

$$a_{ij}^n \overset{def}{=} \Lambda_{ij}^n - \tfrac{1}{n-1} g_{ij} g^{ks} \Lambda_{sk}^n , \nabla a_{ij}^n + a_{ij}^n \omega_0^0 = a_{ijk}^n \omega_0^k \text{ —}$$

возьмем относительный инвариант 2-го порядка $a \overset{def}{=} \left| a_{ij}^n \right|$:

$$d\ln a + (n-1)(\omega_0^0 + \omega_n^n) - 2\omega_k^k = a_k \omega_0^k , a_k = a_n^{ji} a_{ijk}^n .$$

Продолжая последнее уравнение, с использованием выражений (3), (10) получим

$$\nabla a_k + a_k\omega_0^0 + (n-1)\omega_k^0 = a_{ks}\omega_0^s,\, a_{[ks]} = 0. \tag{11}$$

4. Согласно [3], гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$ называется нормализованной (или вполне оснащенной [1]), если задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X_{n+1}$, $X_{n+1} \neq A_0$ (A_0 — нормализуемая точка гиперповерхности V_{n-1}, X_{n+1} – нормализующая точка пространства C_n). Нормализация $A_0 \to X_{n+1}$ гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ (то есть ее полное оснащение) равносильна [4] тому, что к каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ присоединено n гиперсфер

$$P_i = A_i + x_i^0 A_0,\, P_n = A_n + x_n^0 A_0, \tag{12}$$

проходящих через точки A_0 и X_{n+1}; последнее эквивалентно [4] заданию на $V_{n-1} \subset C_n$ двух полей квазитензоров x_i^0, x_n^0:

$$dx_i^0 + x_i^0 - x_j^0\omega_i^j + \omega_i^0 = x_{ij}^0\omega_0^j, \tag{13а}$$

$$dx_n^0 + x_n^0(\omega_0^0 - \omega_n^n) + \omega_n^0 = x_{nj}^0\omega_0^j. \tag{13б}$$

Нормализующая точка $X_{n+1} \in C_n$ имеет разложение [4]:

$$X_{n+1} = \tfrac{1}{2}\left[g^{ij}x_i^0 x_j^0 + g^{nn}(x_n^0)^2\right]A_0 - g^{ij}x_i^0 P_j - g^{nn}x_n^0 P_n + A_{n+1}. \tag{14}$$

Точки A_0, X_{n+1} и проходящие через них гиперсферы P_K образуют конформный полуортогональный репер $\widetilde{R} = \{A_0, P_i, P_n, X_{n+1}\}$.

Если в (13) выполняется лишь одна из групп уравнений — (13а) или (13б) — то говорят [1], что задано частичное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$. Например, если выполнена только система уравнений (13а), то имеем частичное (нормальное) оснащение гиперповерхности полем нормальных окружностей $[P_i]$ (при отображении Дарбу образ окружности $[P_i]$ лежит на гиперквадрике (1)); при этом в каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ окружность $[P_i]$ проходит через точки A_0 и

$$X_{n+1}^{'} = \tfrac{1}{2}g^{kj}x_k^0 x_j^0 A_0 - g^{kj}x_j^0 P_k + A_{n+1}. \tag{15}$$

Нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ эквивалентно тому, что в пространстве C_n задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X'_{n+1}$.

Аналогично, если выполнено только уравнение (13б), то имеем частичное (касательное) оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ полем касательных гиперсфер P_n (гиперсфера P_n касается «касательной гиперплоскости T_{n-1} к V_{m-1}» (см. п. 3) в соответствующей точке $A_0 \in V_{n-1}$). Касательное оснащение подмногообразия $V_{n-1} \subset C_n$ эквивалентно тому, что в пространстве C_n задано дифференцируемое точечное соответствие $A_0 \to X''_{n+1}$, где

$$X''_{n+1} = \tfrac{1}{2} g^{nn} (x_n^0)^2 A_0 - g^{nn} x_n^0 P_n + A_{n+1}. \tag{16}$$

Заметим, что квазитензор

$$\Lambda_n^0 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n-1} g^{jk} g_{nn} \Lambda_{kj}^n \equiv -\tfrac{1}{n-1} \Lambda_{nj}^j \tag{17}$$

в силу соотношений (5_2), (7), (9) удовлетворяет уравнению (13б); следовательно, поле этого квазитензора во 2-й дифференциальной окрестности внутренним образом определяет касательное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

Доказано [4], что в дифференциальной окрестности ниже 3-й не существует внутреннего нормального оснащения подмногообразия $V_{n-1} \subset C_n$. В силу уравнений (11), (13а) *поле охвата*

$$\Lambda_i^0 \overset{def}{=} \tfrac{1}{n-1} a_i \tag{18}$$

в 3-й дифференциальной окрестности внутренним образом задает нормальное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$.

Таким образом, *поля квазитензоров* Λ_i^0, Λ_n^0 *в 3-й дифференциальной окрестности внутренним образом определяют нормализацию* $A_0 \to X_{n+1}$ *(то есть полное оснащение) гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$.

5. Рассмотрим гиперповерхность $V_{n-1} \subset C_n$, нормализованную полями квазитензоров x_i^0, x_n^0 (см. п. 4). При этом, как известно [4], касательное оснащение гиперповерхности V_{n-1} полем квазитензора x_n^0 индуцирует пространство конформной связности без кручения $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, определяемое системой форм Пфаффа $\{\overset{0}{\Omega}{}_b^a\}$.

Известно [4], что:

1) поле квазитензора x_i^0 определяет нормализацию пространства конформной связности $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, ибо

$$dx_i^0 + x_i^0 - x_j^0 \overset{0}{\Omega}{}_i^j + \overset{0}{\Omega}{}_i^0 = \left[x_{ij}^0 + \tfrac{1}{2} g^{nn} (x_n^0)^2 g_{ij} - x_n^0 \Lambda_{ij}^{\ n} \right] \omega_0^j;$$

2) система функций

$$a_{ij}^0 \overset{def}{=} x_{ij}^0 + \tfrac{1}{2} g_{ij} \left[g^{ks} x_k^0 x_s^0 + g^{nn} (x_n^0)^2 \right] - \left(x_i^0 x_j^0 + x_n^0 \Lambda_{ij}^n \right) \quad (19)$$

образует тензор (вообще говоря, несимметричный); тензор a_{ij}^0 называется *основным тензором нормализации* пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ полем квазитензора x_i^0. В случае невырожденности тензора a_{ij}^0 будем говорить, что нормализация пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$ и полное оснащение гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ являются невырожденными.

6. Известно [1], что циклидой Дарбу называется гиперповерхность слоя $C_{n-1}(u)$ пространства $\overset{0}{C}_{n-1,n-1}$, уравнение которой в репере $\overline{R} = \{A_0, A_i, X''_{n+1}\}$ имеет вид

$$Q: p_{ab} \xi^a \xi^b = 0,\ p_{ab} = p_{ba}, \quad (20)$$

где ξ^a – координаты точек $M \in C_{n-1}(u)$, принадлежащих циклиде. Будем считать, что циклида Q не проходит через точку $A_0 \in C_{n-1}(u)$: $p_{00} \neq 0$; за счет нормировки коэффициентов уравнения (20) можно добиться, чтобы $p_{00} = -1$.

Показано [4] (с использованием условия инвариантности циклиды (20)), что при полном оснащении (необязательно невырожденном) гиперповерхности конформного пространства C_n уравнение циклиды (20) в репере $R=\{A_\lambda\}$ запишется в виде

$$\begin{cases} a^0_{(ij)}\left(x^i+g^{il}x^0_i x^{n+1}\right)\left(x^k+g^{kt}x^0_t x^{n+1}\right)+ \\ +\left[x^0_i x^i - x^0 - \frac{1}{2}g^{nn}(x^0_n)^2 x^{n+1} + \frac{1}{2}g^{ik}x^0_i x^0_k x^{n+1}\right]^2=0, \\ x^n + g^{nn}x^0_n x^{n+1}=0. \end{cases} \quad (21)$$

Очевидно, что точка X_{n+1} (см. (14)) принадлежит циклиде (21), соответствующей точке $A_0 \in V_{n-1} \subset C_n$.

При перенесении Дарбу образы всех точек циклиды (21), соответствующей точке $A_0 \in V_{n-1} \subset C_n$, лежат на гиперквадрике Дарбу $Q^2_n \subset P_{n+1}$ (см. (1)), а именно на квадрике Дарбу Q^2_{n-1}, получающейся пересечением гиперквадрики Дарбу (1) с полярой $x^n + g^{nn}x^0_n x^{n+1}=0$ точки P_n относительно этой гиперквадрики; следовательно, в проективном пространстве P_{n+1} при $n \geq 3$ в каждой точке $A_0 \in V_{n-1}$ образом циклиды (21) при перенесении Дарбу является (n–2)-мерная поверхность, вообще говоря, 4-го порядка, лежащая на квадрике Q^2_{n-1} и проходящая через точку $X_{n+1} \in Q^2_{n-1}$. Можно показать, что уравнение этой (n-2)-мерной поверхности 4-го порядка в репере $\widetilde{R}=\{A_0, P_i, P_n, X_{n+1}\}$ запишется в виде

$$\begin{cases} g_{ij}z^i z^j + 2x^0 z^{n+1}=0, \\ a^0_{(ij)}z^i z^j + (z^0)^2=0, \\ z^n=0. \end{cases} \quad (22)$$

Уравнение (21) (или (22)) доказывает следующее предложение: *на гиперповерхности* $V_{n-1} \subset C_n$ *поле циклид Дарбу (21)* *внутренним образом определяется в дифференциальной окрестности не ниже четвертого порядка.*

Действительно, если в уравнении (21) в качестве функций $x_n^0\ x_i^0$ взять квазитензоры Λ_n^0 (см. (17)) и a_k (см. (18)) соответственно второго и третьего порядков, то основной тензор нормализации a_{ij}^0 (см. (19)) внутренним образом определяется в 4-й дифференциальной окрестности.

Можно показать, что циклида Дарбу (21) имеет соприкосновение второго порядка с гиперповерхностью (X_{n+1}), описываемой нормализующей точкой $X_{n+1} \in C_n$.

Если нормализация $X_{n+1} \to A_0$ гиперповерхности $(X_{n+1}) \in C_n$ невырождена, то, повторяя рассуждения и выкладки п. 5 и 6, можно найти внутренним образом определенное поле циклид Дарбу на гиперповерхности (X_{n+1}), имеющих с исходной гиперповерхностью $V_{n-1} \subset C_n$ соприкосновение второго порядка. Само собой разумеется, что решение этой задачи повышает дифференциальные окрестности участвующих при этом функций, определяемых внутренним образом. Поэтому вывод М. А. Акивиса о том, что отыскание ряда коэффициентов уравнения соприкасающейся циклиды Дарбу гиперповерхности $V_{n-1} \subset C_n$ приводит к довольно громоздким выкладкам, является вполне оправданным.

Список литературы

1. *Акивис М.А.* Инвариантное построение геометрии гиперповерхности конформного пространства // Матем. сб. М., 1952. Т. 31, №1. С. 43—75.

2. *Бушманова Г. В., Норден А. П.* Элементы конформной геометрии. Казань, 1972.

3. *Норден А. П.* Конформная интерпретация пространства Вейля // Матем. сб. М., 1949. Т. 24, №1. С. 75—85.

4. *Столяров А. В., Глухова Т. Н.* Конформно-дифференциальная геометрия оснащенных многообразий. Чебоксары, 2007.

A. Stolyarov

About one addition to result of M. A. Akivis

An addition to result of M. A. Akivis concerning the set of Darboux cyclides which have the contact of the second order with a hypersurface of conformal space is given.

УДК 514.764.3

А. В. Христофорова

(Чувашский государственный педагогический университет, г. Чебоксары)

Нормальные связности на оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности в пространстве аффинной связности

Работа посвящена геометрии нормальных связностей, индуцируемых на оснащенной в смысле Нордена — Картана гиперповерхности в пространстве аффинной связности.

Ключевые слова: гиперповерхность, пространство аффинной связности, нормальная связность, оснащение в смысле Нордена — Картана.

В работе индексы принимают следующие значения:

$$I, J, L, K, T, S = \overline{1, n};\ \bar{I}, \bar{J} = \overline{0, n};\ i, j, l, k, t, s = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим пространство аффинной связности $A_{n,n}$, заданное системой $n(n+1)$ форм Пфаффа $\{\theta^I, \theta^I_K\}$, подчиненных структурным уравнениям [1]