ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. IO 1979

УДК 513.73

Г.Л.С в е ш н и к о в а

КОНГРУЭНЦИИ $\mathcal{J}_2$ С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ В ЛИНИЮ ФОКАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В трехмерном проективном пространстве продолжается изучение конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью [1]. Получен класс конгруэнций с вырождающейся в линию фокальной поверхностью, который называется конгруэнциями $\mathcal{J}_2$. Рассмотрены геометрические свойства конгруэнции $\mathcal{J}_2$.

§ I. Конгруэнции $\mathcal{J}$.

Конгруэнцией $\mathcal{J}$ в работе [1] называется конгруэнция кривых второго порядка, для которой существуют две невырождающиеся фокальные поверхности S_i ($i,j,k=1,2$), не являющиеся огибающими поверхностями плоскостей коник; существует фокальная поверхность (F), вырождающаяся в линию, касательная ℓ к которой не инцидентна плоскости кривой и фокальные линии на поверхностях S_i не соответствуют друг другу.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{J}$ к каноническому реперу $R = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, в котором вершины A_i помещены в фокальные точки коники, описывающие поверхности S_i, вершины A_3 - в полюс прямой A_1A_2 относительно коники; вершина A_4 является четвертой гармонической к фокусу F относительно точек пересечения с прямой ℓ касательных плоскостей к поверхностям (A_i) в точках A_i.

Осуществим нормировку вершин репера таким образом, чтобы единичная точка $E_{12}=A_1+A_2$ прямой A_1A_2 была инцидентна прямой A_3F, где

$$F = A_1 + A_2 - \sqrt{2}\, A_3$$

-фокус, описывающий вырождающуюся в линию фокальную поверхность.

Уравнения коники и система уравнений конгруэнции $\mathcal{J}$ при соответствующей нормировке вершин репера приводятся к виду:

$$(x^3)^2 - 2x^1x^2 = 0, \quad x^4 = 0 \tag{1}$$

$$\begin{gathered}\omega_i^j = (-1)^j\, \Gamma_1^{21}\omega_i, \quad \omega_i^3 = \Gamma_i^{3k}\omega_k, \quad \omega_3^i = \Gamma_3^{ik}\omega_k, \\ \omega_3^4 = \Gamma_3^{4k}\omega_k, \quad \omega_4^i = \Gamma_4^{ik}\omega_k, \quad \omega_3^4 = \Gamma_4^{3k}\omega_k, \\ \omega_i^i - \omega_3^3 + \omega_j^i + \frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3 + \omega_2^3 - 2\omega_3^i) = 0,\end{gathered} \tag{2}$$

причем имеют место конечные соотношения:

$$\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{3j} + \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{3i} - \sqrt{2}\left(\Gamma_3^{4i}\Gamma_4^{ij} - \Gamma_3^{4j}\Gamma_4^{ii}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Gamma_4^{3j} - \Gamma_4^{3i}\right) - \Gamma_j^{3i}\Gamma_3^{ij} + \Gamma_j^{3j}\Gamma_3^{ii} = 0. \tag{3}$$

Формы Пфаффа

$$\omega_i^4 = \omega_i$$

приняты в качестве базисных линейно независимых форм. По индексам i и j суммирование не производится и $i \neq j$.

§ 2. Конгруэнции $\mathcal{J}_2$

О п р е д е л е н и е. Конгруэнцией $\mathcal{J}_2$ называется конгруэнция $\mathcal{J}$, для которой выполняются следующие условия: 1/прямые A_iA_3 являются касательными к линиям $\omega_i = 0$ на поверхностях (A_i) и линиям $\omega_j = 0$ на поверхности (A_3), 2/прямые A_iA_4 являются касательными к линиям $\omega_j = 0$ на поверхностях (A_i), 3/ $\Gamma_3^{11} + \Gamma_3^{22} = 0$.

Т е о р е м а. Конгруэнции $\mathcal{J}_2$ существуют и определяются вполне интегрируемой системой уравнений Пфаффа.

9 Зак. 3728

Д о к а з а т е л ь с т в о. Учитывая в системе уравнений (2) и соотношениях (3) условия определения конгруэнции $\mathcal{J}_2$, приведем систему уравнений Пфаффа конгруэнции к виду:

$$\omega_i^j=0,\ \omega_i^3=\Gamma_i^{3j}\omega_j\,,\ \omega_3^i=(-1)\Gamma_3^{11}\omega_i\,,\ \omega_3^4=0, \tag{4}$$
$$\omega_4^i=\Gamma_4^{ik}\omega_k\,,\ \omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k\,,\ \omega_i^i-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i)=0,$$

причем конечные соотношения примут вид:

$$\Gamma_4^{ij}+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{3j}-\Gamma_4^{3i})=0. \tag{5}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_i^j=0$, получаем $\Gamma_4^{ii}=0$.

Обозначим

$$\Gamma=\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{31}-\Gamma_4^{32}). \tag{6}$$

При внешнем дифференцировании уравнений $\omega_4^i=(-1)^j\Gamma\omega_j$ будем иметь уравнение Пфаффа

$$d\Gamma+\Gamma(\omega_1^1+\omega_2^2-2\omega_4^4)+\Gamma_3^{11}(\Gamma_4^{32}\omega_1+\Gamma_4^{31}\omega_2)=0 \tag{7}$$

и квадратичное уравнение

$$d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_3^1-d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_3^2+2(\Gamma_4^{31}\omega_3^2-\Gamma_4^{32}\omega_3^1)\wedge(\omega_3^3-\omega_4^4)+$$
$$+\sqrt{2}\,\Gamma_3^{11}(\Gamma_3^{11}(\Gamma_4^{32}+\Gamma_4^{31})+\Gamma_4^{32}(\Gamma_1^{32}+\tfrac{1}{2}\Gamma_2^{31})-\Gamma_4^{31}(\Gamma_2^{31}+\tfrac{1}{2}\Gamma_1^{32}))\omega_1\wedge\omega_2^2+$$
$$+\ 6\Gamma^2\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{8}$$

После дифференцирования уравнения $\omega_4^3=\Gamma_4^{3k}\omega_k$ получим квадратичное уравнение

$$d\Gamma_4^{31}\wedge\omega_1+d\Gamma_4^{32}\wedge\omega_2+2(\omega_3^3-\omega_4^4)\wedge(\Gamma_4^{31}\omega_1+\Gamma_4^{32}\omega_2)+$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}(\Gamma_4^{31}\Gamma_1^{32}-\Gamma_4^{32}\Gamma_2^{31})\omega_1\wedge\omega_2=0. \tag{9}$$

Из уравнений (8),(9) в силу уравнения (7) следует равенство:

$$\Gamma=0 \tag{10}$$

и уравнения Пфаффа

$$\omega_4^i=0\,,\ \omega_4^3=0\,. \tag{11}$$

Осуществляя продолжение системы

$$\omega_3^i=(-1)^j\Gamma_3^{11}\omega_i\,,$$

получаем уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma_3^{11}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}\,(\omega_1^3+\omega_2^3)=0 \tag{12}$$

и соотношение

$$\Gamma_1^{32}+\Gamma_2^{31}=0\,. \tag{13}$$

Внешнее дифференцирование уравнений

$$\omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{32}\omega_j$$

дает уравнение Пфаффа

$$d\ln\Gamma_1^{32}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}\,(\omega_3^1+\omega_3^2)=0, \tag{14}$$

замыкание которого тождественно удовлетворяется.

После преобразований система уравнений Пфаффа (4) преобразовалась к виду:

$$\omega_i^j=0\,,\ \omega_i^3=(-1)^j\Gamma_1^{32}\omega_j\,,\quad \omega_3^i=(-1)^j\Gamma_3^{11}\omega_i\,,$$
$$\omega_3^4=\omega_4^i=\omega_4^3=0\,,\quad \omega_i^i-\omega_3^3+\frac{1}{\sqrt{2}}(\omega_1^3+\omega_2^3-2\omega_3^i)=0,$$
$$d\ln\Gamma_3^{11}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}\,(\omega_1^3+\omega_2^3)=0,$$
$$d\ln\Gamma_1^{32}+\omega_3^3-\omega_4^4-\sqrt{2}\,(\omega_3^1+\omega_3^2)=0\,.$$

Система уравнений Пфаффа (15), определяющая конгруэнции $\mathcal{J}_2$, вполне интегрируема.

Осуществляя последнюю нормировку вершин репера R таким образом, что

$$\Gamma_1^{32} = 1, \qquad (16)$$

и вводя обозначение

$$\Gamma_3^{11} = \gamma,$$

получим матрицу компонент деривационных формул подвижного репера R конгруэнции $\mathcal{J}_2$ в следующем виде:

$$\begin{matrix} \sqrt{2}\gamma\omega_1 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & 0 & \omega_2 & \omega_1 \\ 0 & -\sqrt{2}\gamma\omega_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & -\omega_1 & \omega_2 \\ \gamma\omega_1 & -\gamma\omega_2 & \frac{\sqrt{2}}{4}(\omega_2-\omega_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2}\left(\frac{1}{4}+\gamma\right)(\omega_2-\omega_1) \end{matrix}$$

Используя матрицу компонент, легко проверить справедливость следующих свойств конгруэнции $\mathcal{J}_2$: 1/ поверхности являются торсами, 2/ координатные линии на поверхности сопряжены, 3/ поверхность (A_3) является огибающей поверхностью семейства плоскостей коник, 4/ асимптотические линии поверхности (A_3) пересекают прямую AA_2 в точках $E_{12} = A_1 + A_2$ и $E_{12}^* = A_1 - A_2$, гармонически делящих точки и 5/ поверхность $(E_{12}^*)^2$ является плоскостью, 6/ фокусы луча A_1A_2 прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) гармонически делят точки A_1 и A_2, 7/ существует расслоение от конгруэнции прямых (A_3A_4) к конгруэнции прямых (A_1A_2) и от прямолинейной конгруэнции (A_1A_2) к неподвижной прямой $\mathcal{F}A_4$.

В репере $R_1 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, где $B_1 \equiv A_1 + A_2$, $B_2 \equiv A_1 - A_2$, $B_3 \equiv A_3$, $B_4 \equiv A_4$, для огибающей поверхности (B_3) семейства плоскостей коник получено каноническое представление:

$$\frac{1}{2}\gamma z = xy + \frac{\sqrt{2}(1-2\gamma)}{\gamma} x^2 y - \frac{2\sqrt{2}}{\gamma} y^3 + [4],$$

где $\quad x = \frac{y^1}{y^3}, \; y = \frac{y^2}{y^3}, \; z = \frac{y^4}{y^3},$

[4] – слагаемые, порядок малости которых не ниже 4, трехпараметрическое семейство соприкасающихся квадрик:

$$2y^1y^2 + 2b_{14}y^1y^4 + 2b_{24}y^2y^4 - \gamma y^3y^4 + b_{44}(y^4)^2 = 0$$

и квадрика Ли:

$$2y^1y^2 - \sqrt{2}\gamma y^1y^4 - \gamma y^3y^4 = 0.$$

Семейство квадрик Ли поверхности (B_3) конгруэнции $\mathcal{J}_2$ является однопараметрическим.

Список литературы

1. С в е ш н и к о в а Г.Л. Конгруэнции кривых второго порядка с одной вырождающейся фокальной поверхностью.– В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.113–125.

2. Ф и н и к о в С.П. Теория пар конгруэнций. М., ГИТТЛ, 1956.