5. Cartan E. Leçons sur la théorie des éspaces á connexion projective. Paris, 1937.

6. Лаптев Г.Ф. Гиперповерхность в пространстве проективной связности // ДАН СССР. 1958. Т.121. № 1. С.41-44.

7. Лаптев Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий // Тр. Моск. матем. о-ва. М., 1953. Т.2. С.275-382.

8. Bortolotti E. Connessioni nelle varietá luogo di spazi; applicazione alla geometria metrica differenziale delle congruenze di rette // Rend. Semin. Fac. Sci. Univ. Cagliari. 1933. V.3. P. 81-89.

УДК.514.754.7

УРАВНЕНИЯ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА МНОГООБРАЗИИ С АФФИННОЙ СВЯЗНОСТЬЮ

И.И.Цыганок

(Владимирский государственный педагогический университет)

В статье на многообразии с аффинной связностью выводятся уравнения векторного поля, его фундаментальных тензорных полей первого, второго и т.д. порядков; описываются поля с обращающимися в нуль фундаментальными тензорными полями k-го порядка.

1. Пусть M – n-мерное многообразие с аффинной связностью ∇ без кручения, заданной в расслоении $L(M)$ линейных реперов $\mathcal{R}_x=\{e_i\}$ $(i,j,k,\ell=\overline{1,n})$ над M. Обозначим через $\omega=\{\omega^i_j\}$ форму связности ∇, а через $\theta=\{\theta^i\}$ – каноническую форму на M. Формы θ и ω удовлетворяют структурным уравнениям аффинной связности[1]:

$$d\theta^i=\theta^j\wedge\omega^i_j\,,\quad d\omega^i_j=\omega^k_j\wedge\omega^i_k+R^i_{jk\ell}\,\theta^k\wedge\theta^\ell, \tag{1.1}$$

где $R^i_{jk\ell}$ – компоненты тензора кривизны связности ∇. При фиксации точки x многообразия M формы $\theta^i=0$, а формы ω^i_j становятся формами π^i_j полной линейной группы $GL(n,\mathbb{R})$ и подчиняются структурным уравнениям $\delta\pi^i_j=\pi^k_j\wedge\pi^i_k$, где δ – символ дифференцирования по параметрам группы $GL(n,\mathbb{R})$.

Рассмотрим векторное поле $\xi=\{\xi^i\}$ на многообразии M с аффинной связностью ∇. Для него определен ковариантный дифференциал $\nabla\xi$ следующим равенством:

$$(\nabla\xi)_x=\{d\xi^i+\xi^k\omega^i_k\}_x\,e_i \tag{1.2}$$

для любой точки x. При этом $\nabla\xi$ является линейной дифференциальной формой со значениями в $T(M)$. Ее значение $(\nabla\xi)_x(X)$ на векторе $X\in T_x(M)$ называется ковариантной производной по направлению X и обозначается $(\nabla_X\xi)_x$, поэтому

$$(\nabla_X\xi)_x=\{d\xi^i+\xi^k\omega^i_k\}_x(X)\,e_i. \tag{1.3}$$

Отображение

$$(\nabla\xi)_x:\ T_x(M)\to T_x(M) \tag{1.4}$$

по закону (1.3) сопоставляет вектору X вектор $(\nabla_X\xi)_x$. Непосредственно проверяется, что отображение (1.4) является линейным преобразованием касательного пространства $T_x(M)$. Значит,

$$(\nabla_X\xi)_x=A_xX\,, \tag{1.5}$$

где $A_x=\{\xi^i_j(x)\}\in GL(n,\mathbb{R})$. Тогда уравнениям (1.2) можно придать следующий вид:

$$d\xi^i+\xi^k\omega^i_k=\xi^i_j\theta^j. \tag{1.6}$$

При фиксации точки x многообразия M из (1.6) последуют уравнения инвариатности вектора ξ_x относительно действий группы $GL(n,\mathbb{R})$: $\delta\xi^i+\xi^k\pi^i_k=0$. Поэтому уравнения (1.5), как и равносильные им уравнения (1.6), являются уравнениями векторного поля ξ на многообразии M с аффинной связностью ∇.

С учетом уравнений структуры (1.1) продолжение уравнений (1.6) имеет вид:

$$d\xi^i_j-\xi^i_k\,\omega^k_j+\xi^k_j\,\omega^i_k=\xi^i_{jk}\,\theta^k, \tag{1.7}$$

где

$$\xi^i_{jk}-\xi^i_{kj}=\xi^\ell R^i_{\ell kj}. \tag{1.8}$$

Равенства (1.7) являются уравнениями тензорного поля A на многообразии M. Соотношения (1.8) носят название тождеств Риччи и служат условиями интегрируемости уравнений векторого поля ξ [2, с.127], [3, с.43].

После p-го продолжения уравнений (1.6) получим:

$$d\xi^i_{j_1\ldots j_p}-\sum_{s=1}^{p}\xi^i_{j_1\ldots j_{s-1}kj_{s+1}\ldots j_p}\,\omega^k_{j_s}+\xi^k_{j_1\ldots j_p}\,\omega^i_k=\xi^i_{j_1\ldots j_pj_{p+1}}\,\theta^{j_{p+1}}, \tag{1.9}$$

где

$$\xi^i_{j_1\dots j_p j_{p+1}} - \xi^i_{j_1\dots j_{p+1} j_p} = \xi^k_{j_1\dots j_{p-1}} R^i_{k j_{p+1} j_p} - \sum_{s=1}^{p-1} \xi^i_{j_1\dots j_{s-1} k j_{s+1}\dots j_{p-1}} R^k_{j_s j_{p+1} j_p} \quad (1.10)$$

Равенства (I.9) являются уравнениями тензорного поля $\mathfrak{A}_p$ с компонентами $\{\xi^i_{j_1\dots j_p}\}$ на многообразии M. Соотношения (I.IO) носят название тождеств Риччи и выражают условие интегрируемости уравнений $(p-1)$-го продолжения. Тензорное поле $\mathfrak{A}_p$ назовем фундаментальным тензорным полем p-го порядка векторного поля ξ. Для $p=1$ имеем $\mathfrak{A}_1 = A$.

2. Исследуем случай, когда получаемое после $(p+1)$-го продолжения уравнений (I.6) фундаментальное тензорное поле $\mathfrak{A}_{p+1}$ обратится в нуль.

Полагаем связность ∇ плоской, тогда тензор кривизны R равен нулю на M, и из (I.IO) последует, что фундаментальные тензорные поля $\mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_p, \dots$ векторного поля ξ являются симметрическими.

В случае плоской связности ∇ на многообразии M существует [1, с.201] глобально определенное поле реперов $\mathcal{R}_x$ такое, что $\omega^i_j = 0$ и $d\theta^i = 0$. Поэтому на многообразии M можно ввести локальную систему координат x^i, относительно которой уравнения (I.9) принимают следующий вид:

$$d\xi^i_{j_1\dots j_p} = \xi^i_{j_1\dots j_p j_{p+1}}\, dx^{j_{p+1}}. \quad (2.1)$$

При этом

$$\xi^i_{j_1\dots j_p j_{p+1}} = \xi^i_{j_1\dots j_{p+1} j_p}. \quad (2.2)$$

Тогда требование $\mathfrak{A}_{p+1} = 0$ равносильно системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial^{(p+1)} \xi^i}{\partial x^{j_{p+1}}\, \partial x^{j_p} \dots \partial x^{j_1}} = 0,$$

где

$$\frac{\partial^{(p+1)} \xi^i}{\partial x^{j_{p+1}} \dots \partial x^{j_s} \dots \partial x^{j_t} \dots \partial x^{j_1}} = \frac{\partial^{(p+1)} \xi^i}{\partial x^{j_{p+1}} \dots \partial x^{j_t} \dots \partial x^{j_s} \dots \partial x^{j_1}}.$$

Следовательно, векторное поле ξ относительно локальной системы координат x^i имеет компоненты

$$\xi^i = \frac{1}{p!} a^i_{j_1\dots j_p} x^{j_1}\dots x^{j_p} + \dots + \frac{1}{2!} a^i_{j_1 j_2} x^{j_1} x^{j_2} + a^i_{j_1} x^{j_1} + a^i, \quad (2.3)$$

где $a^i_{j_1\dots j_p}, \dots, a^i_{j_1 j_2}, a^i_{j_1}, a^i$ – постоянные, симметричные по нижним индексам величины. Доказана следующая

Т е о р е м а 1. Если на многообразии M с плоской связностью ∇ для векторного поля ξ его фундаментальное тензорное поле $\mathfrak{A}_{p+1}$ обращается в нуль, то в некоторой локальной системе координат x^i поле ξ допускает представление (2.3).

Попытаемся исследовать подобный случай для неплоской связности ∇. Это проще сделать, когда ∇ является связностью Леви-Чивита.

Т е о р е м а 2. Если на компактном римановом многообразии (M, g) фундаментальное тензорное поле $\mathfrak{A}_p$ $(p>1)$ векторного поля ξ обращается в нуль, то ξ – ковариантно постоянное векторное поле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим лемму Хопфа [4, с.308], согласно которой на компактном римановом многообразии (M, g) для функции $\varphi: M \to R$ из условия $\Delta\varphi \geqslant 0$ следует $\Delta\varphi = 0$. Здесь через $\Delta\varphi$ обозначен лапласиан φ. Пусть x^i – локальная система координат в M. Обозначим через g_{ij} – ковариантные компоненты метрики g, а через g^{ij} – ее контравариантные компоненты, тогда на римановом многообразии $\Delta\varphi$ записывается в виде $\Delta\varphi = g^{ij}\nabla_i\nabla_j\varphi$, где ∇_i – символ ковариантного дифференцирования по направлению векторного поля $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Используя принятую в этом случае методику [5, с.51], выберем

$$\varphi = \| \mathfrak{A}_{p-2} \|^2,$$

где

$$\| \mathfrak{A}_{p-2} \|^2 = g_{ik}\, g^{j_1 l_1} g^{j_2 l_2} \dots g^{j_{p-2} l_{p-2}}\, \xi^i_{j_1 j_2\dots j_{p-2}}\, \xi^k_{l_1 l_2\dots l_{p-2}}.$$

Тогда

$$\Delta\varphi = 2 g_{ik}\, g^{j_1 l_1} g^{j_2 l_2} \dots g^{j_{p-2} l_{p-2}} [(g^{st}\nabla_s\nabla_t \xi^i_{j_1\dots j_{p-2}})\, \xi^k_{l_1\dots l_{p-2}} + g^{st} (\nabla_s \xi^i_{j_1\dots j_{p-2}})(\nabla_t \xi^k_{l_1\dots l_{p-2}})].$$

Если $\mathfrak{A}_p = 0$, то $g^{st}\nabla_s\nabla_t \xi^i_{j_1\dots j_{p-2}} = 0$ и, следовательно,

$$\Delta\varphi = \| \mathfrak{A}_{p-1} \|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда, на основании леммы Хопфа, заключаем, что $\| \mathfrak{A}_{p-1} \|^2 = 0$ и $\mathfrak{A}_{p-1} = 0$.

Аналогичные рассуждения для функции $\varphi = \| \mathfrak{A}_{p-3} \|^2$ позволят сделать вывод, что $\mathfrak{A}_{p-2} = 0$, и т.д. Наконец, после $(p-1)$ шагов получим $A = 0$. Таким образом, $\nabla\xi = 0$, если $\mathfrak{A}_p = 0$. Можно сформулировать

С л е д с т в и е. На компактном римановом многообразии

(M, g) векторное поле ξ, отличное от ковариантно постоянного, порождает бесконечную последовательность фундаментальных тензорных полей $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots$ соответственно первого, второго и т.д. порядков, причем ни один из членов этой последовательности не равен нулю тождественно.

Библиографический список

1. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.1. 344с.
2. Норден А.П. Пространства аффинной связности. М., 1976. 432 с.
3. Эйзенхарт Л.П. Риманова геометрия. М.: ИЛ, 1948. 318 с.
4. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии. М.: Наука, 1981. Т.2. 414 с.
5. Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957. 152 с.

Статья написана при поддержке РФФИ, проект № 44-01-01595.

УДК 514.75

К ГЕОМЕТРИИ ОРТОГОНАЛЬНЫХ 2-ПОВЕРХНОСТЕЙ В E^4

М.А.Чешкова

(Алтайский государственный университет)

В евклидовом пространстве E^4 рассматривается пара 2-поверхностей, между которыми установлено соответствие $f: M \to M'$ так, что касательные плоскости в соответствующих точках ортогональны.

1. Пусть $\mathcal{F}(M)$ – R – алгебра дифференцируемых на M функций, $T^r_s(M)$ – $\mathcal{F}$ – модуль дифференцируемых тензорных полей на M типа (r,s), ∂ – дифференцирование в E^4.

Формулы Гаусса-Вейнгартена [1] поверхности M запишутся в виде

$$\partial_x y = \nabla_x y + \alpha(x,y), \quad \partial_x \eta = -A_\eta x + \nabla^\perp_x \eta, \tag{1}$$

где

$$x, y \in T^1_0(M) = TM, \quad A_\eta \in T^1_1(M),$$

α – вторая фундаментальная форма, $\eta \in T^\perp M$, ∇ – связность Леви-Чивита, $\nabla^\perp$ – нормальная связность.

Имеют место уравнения Гаусса-Кодацци

$$\begin{cases} R(x,y)z = A_{\alpha(y,z)}x - A_{\alpha(x,z)}y, \\ (\mathcal{D}_x\alpha)(y,z) = (\mathcal{D}_y\alpha)(x,z), \\ R^\perp(x,y)\eta = \alpha(x, A_\eta y) - \alpha(y, A_\eta x), \\ (dA_\eta)(x,y) = A_{\nabla^\perp_x\eta}y - A_{\nabla^\perp_y\eta}x, \\ g(A_\eta x, y) = g^\perp(\alpha(x,y),\eta), \\ g^\perp(R^\perp(x,y)\eta, \varepsilon) = g([A_\eta, A_\varepsilon]x, y), \end{cases} \tag{2}$$

где

$$x,y,z \in TM; \quad \eta, \varepsilon \in T^\perp M; \quad R \in T^1_3(M)$$

– кривизна связности ∇, $R^\perp$ – кривизна нормальной связности,

$$(dA_\eta)(x,y) = \nabla_x A_\eta y - \nabla_y A_\eta x - A_\eta[x,y]$$

– внешний дифференциал A_η в связности ∇,

$$(\mathcal{D}_x\alpha)(y,z) = (\nabla^\perp_x\alpha)(y,z) - \alpha(\nabla_x y, z) - \alpha(y, \nabla_x z)$$

– ковариантная производная в связности $\nabla^\perp \oplus \nabla$.

2. Положим

$$\vec{pq} = \mathscr{b}, \quad p \in M, \quad q = f(p) \in M'.$$

Тогда отображение $f: M \to M'$ запишется в виде $q = p + \mathscr{b}$. Разложим каждый вектор $\mathscr{b}$ на касательную и нормальную составляющие

$$\mathscr{b} = a + \xi, \quad a \in TM, \quad \xi \in T^\perp M.$$

Перенесем касательный вектор $y_q \in T_q M'$ параллельно (в связности ∂) в точку $p = f^{-1}(q)$ и обозначим его через $\underline{y}_p$, имеем

$$\underline{dfx} = x + \partial_x \mathscr{b}, \quad x \in TM.$$

В силу (1) получим

$$\begin{cases} \underline{dfx} = Fx + \omega x, \\ Fx = x - A_\xi x + \nabla_x a, \quad \omega x = \alpha(x,a) + \nabla^\perp_x \xi. \end{cases} \tag{3}$$

Из (2) и (3) имеем

$$\begin{cases} (d^\perp\omega)(x,y) = \alpha(y, Fx) - \alpha(x, Fy), \\ R^\perp(x,y)\xi = (d^\perp\omega)(x,y) - \alpha(y, \nabla_x a) + \alpha(x, \nabla_y a), \\ (dF)(x,y) = A_{\omega x}y - A_{\omega y}x, \\ R(x,y)a = (dA_\xi)(x,y) + (dF)(x,y), \end{cases} \tag{4}$$