ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.9 1978

УДК 513.73

Т.П.Ф у н т и к о в а

ТОРСОВЫЕ ВЫРОЖДЕННЫЕ КОНГРУЭНЦИИ $(LP)_{2,1}$

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассматриваются вырожденные конгруэнции $(LP)_{2,1}$ пар фигур $\{L,P\}$, где L -прямая, P -точка [1]. Каждой точке P линии (P) соответствует одномерное многообразие $(L)_P$ прямых L прямолинейной конгруэнции (L).

В данной работе продолжается исследование торсовых конгруэнций $(LP)_{2,1}$, начатое в [2]. Рассматриваются конгруэнции, у которых линейчатая поверхность $(L)_P$ является конической поверхностью.

§ I. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$

Присоединим к каждой паре фигур $\{L,P\}$ конгруэнции $(LP)_{2,1}$ подвижный репер $R=\{A,\overline{e}_1,\overline{e}_2,\overline{e}_3\}$ следующим образом: вершину A репера поместим в ту точку луча L, в которой касательная плоскость к линейчатой поверхности $(L)_P$ параллельна касательной $\tilde{\ell}$ линии (P) в соответствующей точке P (в том случае, когда поверхность $(L)_P$ -торс, точка A является точкой ребра возврата), конец вектора $\overline{e}_1$ совместим с точкой P, вектор $\overline{e}_2$ направим параллельно $\tilde{\ell}$, а вектор $\overline{e}_3$ - по лучу L и пронормируем соответствующим образом. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ определяются системой дифференциальных уравнений:

$$\omega_1^1+\omega^1=0,\quad \omega^3+\omega_1^3=0,\quad \omega^1=b\theta,\quad \omega^2=k\omega_3^1+\ell\theta,\quad \omega_2^1=a\theta,$$
$$\omega_2^3=c\theta,\quad \omega_3^2=m\theta+\omega_3^1,\quad \omega_2^2=n\omega_3^1+s\theta,\quad \omega^3=p\omega_3^1+q\theta, \tag{1}$$

где $\theta=\omega^2+\omega_1^2$; ω^i,ω_j^i -компоненты инфинитезимальных перемещений репера R, удовлетворяющие уравнениям структуры аффинного пространства и условию эквиаффинности, и существуют с произволом трех функций двух аргументов.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $(LP)_{2,1}$ обладают следующими свойствами: 1/ касательная плоскость к фокальной поверхности прямолинейной конгруэнции $(A,\overline{e}_2)$, описанной точкой $\overline{F}_2=\overline{A}-\frac{b}{a}\overline{e}_2$, проведенная в точке F_2, содержит соответствующий луч L; 2/ касательная плоскость к торсу $cb\theta-a\omega^3=0$ прямолинейной конгруэнции $(A,\overline{e}_2)$ вдоль луча $\{A,\overline{e}_2\}$ параллельна соприкасающейся плоскости линии (P) в точке P; 3/ аффинные нормали линейчатой поверхности $(L)_P$, взятые вдоль луча L, принадлежат плоскости $\{A,\overline{e}_3,\overline{e}_1+\overline{e}_2\}$; 4/ если соприкасающаяся плоскость линии (P) проходит через точку A, то поверхность (A) -линейчатая, а все образующие линейчатой поверхности $(L)_P$ пересекают неподвижную прямую; 5/ конгруэнции $(LP)_{2,1}$, у которых точка A является фокальной точкой луча прямолинейной конгруэнции $(A,\overline{e}_2)$, обладают тем свойством, что существует аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции $(A,\overline{e}_1)$ к многообразию плоскостей $(A,\overline{e}_2,\overline{e}_3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1/ Так как

$$d\overline{F}_2=(\omega^2-\frac{b}{a}\omega_2^2)\overline{e}_2+(\omega^3-\frac{b}{a}\omega_2^3)\overline{e}_3-d(\frac{b}{a})\overline{e}_2,$$

то касательная плоскость к поверхности (F_2) определяется векторами $\bar{e}_2, \bar{e}_3$ и содержит луч L.

2/Имеем $(d\bar{A})_{c\ell\theta - a\omega^3 = 0} = \theta\ell(\bar{e}_1 + \frac{c}{a}\bar{e}_3) + \omega^2\bar{e}_2$,

т.е. касательная плоскость к торсу $c\ell\theta - a\omega^3$ прямолинейной конгруэнции вдоль луча $\{A; \bar{e}_2\}$ определяется точкой A и векторами $\bar{e}_2$, $a\bar{e}_1 + c\bar{e}_3$. Так как соприкасающаяся плоскость α линии (P) в точке P определяется точкой P и векторами

$$d\bar{P} = \theta\bar{e}_2, \quad d^2\bar{P} = \theta(a\bar{e}_1 + c\bar{e}_3) + (\dots)\bar{e}_2,$$

то упомянутые в теореме плоскости параллельны.

3/Асимптотические линии поверхности $(L)_p$ задаются уравнением

$$\omega_3^1[2k\,dt + \omega_3^1(kp - 2tnk - t^2n + t^2k - t\bar{k})] = 0.$$

Направляющий вектор аффинной нормали к поверхности $(L)_p$ в точке $\bar{A} + t\bar{e}_3$ имеет вид:

$$\bar{\eta} = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + [t\frac{n}{k} - t + \frac{\bar{k}}{2k}]\bar{e}_3. \qquad (2)$$

Из (2) непосредственно следует справедливость данного свойства.

4/Соприкасающаяся плоскость линии (P) в точке P проходит через точку A, если $c = 0$. Учитывая это условие в уравнениях (1), получаем $p = 0$. Следовательно,

$$(d\bar{A})_{\theta=0} = k\bar{e}_2, \quad (d\bar{e}_3)_{\theta=0} = n\bar{e}_2,$$

т.е. поверхность (A) является линейчатой поверхностью с образующей $\{A, \bar{e}_2\}$, и все лучи линейчатой поверхности $(L)_p$ пересекают неподвижную вдоль направления $\theta = 0$ прямую $\{A, \bar{e}_2\}$.

5/Точка A является фокальной точкой луча прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_2)$ при условии $\ell = 0$. Учитывая это условие в системе уравнений (1), получаем $ka - q = 0$.

При найденных соотношениях условия аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции $(A, \bar{e}_1)$ к семейству плоскостей $(A, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$

$$\omega_1^2 \wedge \omega_2^1 + \omega_1^3 \wedge \omega_3^1 = 0, \quad \omega^2 \wedge \omega_2^1 + \omega^3 \wedge \omega_3^1 = 0$$

тождественно удовлетворяются. Теорема доказана.

§ 2. Конгруэнции $\mathcal{N}$

Рассмотрим конгруэнции $(LP)_{2,1}$, удовлетворяющие следующим условиям: 1/линейчатая поверхность $(L)_p$ является конической поверхностью; 2/фокальные точки лучей прямолинейных конгруэнций $(A, \bar{e}_3), (A, \bar{e}_2)$ совпадают соответственно с точками

$$\bar{F}_3 = \bar{A} + \bar{e}_3, \quad \bar{F}_2 = \bar{A} + \bar{e}_2, \qquad m = 1.$$

Назовем такие конгруэнции конгруэнциями $\mathcal{N}$. Аналитически условия 1 и 2 записываются в виде следующих соотношений:

$$\ell - \ell = 1, \quad \ell + a = 0, \quad p = 0, \quad k = 0. \qquad (3)$$

Учитывая (3) в системе дифференциальных уравнений (1), находим

$$a - s + n - 2 = 0, \quad q + c + an = 0, \quad n(\ell + n) = 0. \qquad (4)$$

Рассмотрим случай $\ell + n = 0$, $n \neq 0$. Тогда последовательно продолжая систему уравнений (1),(4), получаем следующие соотношения:

$$c = a = q = \ell = 0, \quad \ell = -1, \; m = 1, \; n = 1, \; s = -1, \; k = p = 0. \qquad (5)$$

В силу условий (5) система дифференциальных уравнений конгруэнции $\mathcal{N}$ имеет следующий вид:

$$\omega^1=\omega_1^1=\omega^3=\omega_1^3=\omega_2^1=\omega_2^3=0\ ,\quad \omega^2=-\theta,$$
$$\omega_3^2=\theta+\omega_3^1\ ,\quad \omega_2^2=\omega_3^1-\theta\ \ (\theta=\omega^2+\omega_1^2). \tag{6}$$

Анализируя систему (6), приходим к заключению, что конгруэнции N существуют с произволом девяти постоянных.

Т е о р е м а 2. Конгруэнции N обладают следующими свойствами: I/линии (P) и (A) являются прямыми; 2/точка $\bar M=\bar A+\frac{1}{2}\bar e_1$ -стационарная точка конгруэнции; 3/торсы прямолинейной конгруэнции (L) высекают на фокальной поверхности (F_3) сопряженную сеть плоских линий; 4/фокальная поверхность (F_3) является квадрикой, а именно, однополостным гиперболоидом с центром в точке M.

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Так как

$$(d\bar P)=d(\bar A+\bar e_1)=\theta\bar e_2\,,\ d\bar A=-\theta\bar e_2\,,\ d\bar e_2=2\theta\bar e_2,$$

то линии (P) и (A) -прямые. 3/Стационарность точки M следует из того, что

$$d\bar M=d(\bar A+\tfrac{1}{2}\bar e_1)=-\theta\bar e_2+\tfrac{1}{2}(2\theta\bar e_2)=0.$$

3/Торсы прямолинейной конгруэнции (L) задаются уравнением $\theta\cdot\omega_3^1=0$. Основная квадратичная форма поверхности (F_3) имеет вид $\varphi=\theta^2+(\omega_3^1)^2$., т.е. линии $\theta=0$, $\omega_3^1=0$ сопряжены на поверхности (F_3). Эти линии являются плоскими, так как

$$(d\bar F_3)_{\omega_3^1=0}=\theta\bar e_3\,,\ (d\bar e_3)_{\omega_3^1=0}=\theta(\bar e_2+\bar e_3),\ d(\bar e_2+\bar e_3)_{\omega_3^1=0}=\theta\bar e_3;$$

$$(dF_3)_{\theta=0}=\omega_3^1(\bar e_1+\bar e_2-\bar e_3),\ d(\bar e_1+\bar e_2-\bar e_3)_{\theta=0}=(\bar e_1-\bar e_3+2\bar e_2)\omega_3^1,\ d(\bar e_1-\bar e_3+2\bar e_2)_{\theta=0}=(\bar e_1-\bar e_3+3\bar e_2)\omega_3^1.$$

Линия $\theta=0$ инцидентна плоскости $(F_3,\bar e_1-\bar e_3,\bar e_2)$, а линии $\omega_3^1=0$ -плоскости $(F_3,\bar e_2,\bar e_3)$.

4/Точка F_3 инцидентна инвариантной квадрике

$$Q=-2(x^1)^2-(x^3)^2+2x^2x^3-4x^1x^3+2x^1+2x^3-1=0,$$

центром которой является точка M. Теорема доказана.

Основываясь на приведенных свойствах конгруэнции N, можно сказать, что для построения данной конгруэнции достаточно задать произвольный однополостный гиперболоид, определяемый девятью постоянными величинами.

Список литературы

I. М а л а х о в с к и й В.С. О вырожденных конгруэнциях пар фигур в трехмерном проективном пространстве.- В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.3. Калининград, 1973, с.41-49.

2. Ф у н т и к о в а Т.П. Безынтегральное представление одного класса вырожденных конгруэнций $(LP)_{2,1}$.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8. Калининград, 1977, с.110-117.