Из дифференциальных сравнений (17) следует, что объект кривизны R в случае поверхности S_m является тензором, содержащим четыре простых подтензора [5]:

1) тензор кривизны R^i_{jkl} касательной линейной подсвязности Γ^i_{jk};

2) тензор кривизны $\{R^i_{jkl}, R_{ijk}\}$ центропроективной подсвязности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma_{ij}\}$;

3) тензор кривизны R^a_{bij} нормальной линейной подсвязности Γ^a_{bi};

4) тензор кривизны $\{R^i_{jkl}, R^a_{bij}, R^i_{ajk}\}$ линейно-групповой подсвязности $\{\Gamma^i_{jk}, \Gamma^a_{bi}, \Gamma^i_{aj}\}$.

Список литературы

1. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т. 4. С. 71 – 120.

2. *Лаптев Г.Ф., Остиану Н.М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1971. Т.3. С. 49 – 94.

3. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т.9. С.5 – 247.

4. *Лаптев Г.Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ. М., 1966. Т.1 С. 139 – 189.

5. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград., 2000.

O. Omelyan

NONTENSORITY THE OBJECT OF CURVATURE OF GROUP CONNECTION ON THE DISTRIBUTION OF PLANES

In the projective space non-holonomic surface or distribution of planes is considered. It is proved, that the object of curvature of group connection in the bundle, associated with non-holonomic and holonomic distributions, isn't a tensor; but it is form geometrical object with fundamental object of the second order and with object of the connection.

УДК 514.76

В.И. Паньженский, О.П. Сурина

(Пензенский государственный педагогический университет)

МЕТРИЧЕСКИЕ СВЯЗНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ ФИНСЛЕРОВА ТИПА*

Говоря о пространствах финслерова типа, мы имеем ввиду их ближайшие обобщения: обобщенные финслеровы пространства, лагранжевы пространства и обобщенные лагранжевы пространства. Уже для финслеровых пространств задача внесения связности, так или иначе согласованной с метрикой, приводит к различным результатам [1].

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

В настоящей работе при построении связности мы переносим известное исчисление Кошуля для римановых пространств на пространства финслерова типа [2; 3]. При таком подходе задача внесения метрической связности сводится к построению нелинейной связности по заданной метрике. На этом пути возможны различные варианты, два из которых обсуждаются в данной статье. В обоих случаях вычисление коэффициентов связности для конкретных классов пространств является достаточно сложным. Мы приводим также примеры метрик финслерова типа, для которых найдено явное выражение коэффициентов метрической связности.

1. Пусть *M* – *n*-мерное гладкое многообразие; *TM* – касательное расслоение над *M;* $\pi : TM \to M$ – каноническая проекция. Если $x \to (x^i)$ – локальные координаты в $U \subset M$, то в $\pi^{-1}(U) \subset TM$ возникают естественные локальные координаты $z = (x, y) \to (x^A) = (x^i, x^{n+i} = y^i)$, где y^i – координаты вектора *y* относительно натурального базиса $\{\partial_i\}$ $(\partial_i = \partial / \partial x^i, i, j, k, ... = \overline{1,n}; A, B, C, ... = \overline{1,2n})$.

Пусть далее ∇, вообще говоря, нелинейная связность на *M;* $N_i^k(x, y)$ – ее коэффициенты, определяемые разложением $\nabla_{\partial_i} Y = N_i^k(Y)\partial_k$. Как обычно строятся горизонтальные и вертикальные лифты векторных полей с базы *M* на касательное расслоение *TM*: $h : X \to X^h$; $v : X \to X^v$. Если $X = X^i \partial_i$, то $X^h = X^i \partial_i^h$; $X^v = X^i \partial_i^v$, где $\partial_i^h = \partial_i - N_i^k \partial_{n+k}$, $\partial_i^v = \partial_{n+i}$. В каждой точке $z \in TM$ векторы ∂_i^h образуют базис горизонтального распределения $H : z \to H_z$ связности ∇, а ∂_i^v – базис вертикального распределения $V : z \to V_z$. Таким образом, $\{\partial_i^h, \partial_i^v\}$ является локальным базисом векторных полей на *TM*, адаптированным к структуре почти произведения $T_z(M) = H_z \oplus V_z$.

Каноническая проекция касательного расслоения индуцирует векторное расслоение над *M*: $F(TM) = \bigcup_{z \in TM} T_{\pi(z)} M$, которое называется финслеровым расслоением. Множество всех гладких сечений из *TM* в *F*(*TM*) обозначим через $SecF(TM)$. Каждое такое сечение $X : TM \to F(TM)$ есть финслерово векторное поле на *M*. Локальный базис $\{\partial_i\}$ векторных полей на *M* является локальным базисом и финслеровых векторных полей. Финслерово векторное поле $y : z = (x, y) \to (z, y)$ называется фундаментальным.

Финслерова связность на *M* это отображение

$$\nabla : SecT(TM) \times SecF(TM) \to SecF(TM),$$

которое каждому векторному полю $\tilde{X}$ на *TM* и финслерову векторному полю *Y* на *M* ставит в соответствие финслерово векторное поле $Z = \nabla_{\tilde{X}} Y$ (ковариантная производная поля *Y* вдоль $\tilde{X}$). При этом требуется, чтобы отображение ∇ обладало известными свойствами определения линейной связности по Кошулю.

Пусть далее

$$g : SecF(TM) \times SecF(TM) \to \mathsf{F}(TM),$$

где $F(TM)$ – кольцо гладких функций на TM, невырожденное симметрическое финслерово тензорное поле типа (0,2) на M.

Задание $g = g_{ij}(x, y)dx^i dx^j$ определяет на M обобщенную лагранжеву структуру, а (M, g) – называется обобщенным лагранжевым пространством. Если существует функция L на TM, порождающая g: $g_{ij} = L_{\cdot i \cdot j}$, ($L_{\cdot i} = \partial L / \partial y^i$), то имеем лагранжево пространство $L^n = (M, L)$ с лагранжианом L. Если функции $g_{ij}(x, y)$ на TM являются однородными нулевой степени по слоевым координатам, то обобщенное лагранжево пространство называется обобщенным финслеровым $\mathsf{F}^n = (M, g)$. И, наконец, если существует лагранжиан L, порождающий g, то обобщенное финслерово пространство является финслеровым F^n.

2. Пусть теперь на M задана некоторая нелинейная связность ∇, финслерова связность ∇ и метрический тензор g пространства финслерова типа. Связность ∇ называется согласованной с g, если $\nabla_{\tilde{X}} g = 0$ для всех $\tilde{X} \in SecT(TM)$. Если $(\Gamma^i_{jk}, C^i_{jk})$ – коэффициенты связности ∇, определяемые разложением

$$\nabla_{\partial^h_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij} \partial_k, \; \nabla_{\partial^v_i} \partial_j = \mathrm{C}^k_{ij} \partial_k,$$

то потребовав, чтобы $\Gamma^k_{ij} = \Gamma^k_{ji}$, $C^k_{ij} = C^k_{ji}$, находим

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial^h_i g_{sj} + \partial^h_j g_{is} - \partial^h_s g_{ij}); \tag{1}$$

$$C^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ks} (\partial^v_i g_{sj} + \partial^v_j g_{is} - \partial^v_s g_{ij}). \tag{2}$$

Таким образом, тензорная часть C^k_{ij} связности явно определена формулой (2), а для вычисления кэффициентов Γ^i_{jk} связности ∇ необходима еще и нелинейная связность ∇.

3. Рассмотрим лагранжиан $L = \frac{1}{2} g_{ij}(x, y) y^i y^j$ и потребуем его невырожденность $\det\left\| L_{\cdot i \cdot j} \right\| = \det\left\| g_{ij} + T_{ij} \right\| \neq 0$, где $T_{ij} = g_{oi \cdot j} + g_{oj \cdot i} + \frac{1}{2} g_{oo \cdot i \cdot j}$ являются компонентами тензора непотенциальности T, а индекс "о" означает свертывание с компонентами касательного вектора (например, $g_{oi \cdot j} = y^k g_{ki \cdot j}$). В этом случае уравнения Эйлера-Лагранжа лагранжиана L можно привести к каноническому виду: $\ddot{x}^k + G^k(x, \dot{x}) = 0$. Заметим, что для этого мы должны построить матрицу, обратную к $\left\| L_{\cdot i \cdot j} \right\|$. Теперь в качестве нелинейной связности мы можем взять связность с коэффициентами $N^i_j = G^i_{\cdot j}$. Построенная таким образом связность называется канонической финслеровой связностью пространства $\mathsf{L}^n = (M, g)$.

Замечание. Коэффициенты $G_{ij}^{k} = G_{\cdot i \cdot j}^{k}$ также являются коэффициентами связности. В финслеровом случае они определяют известную связность Бервальда, которая, вообще говоря, не является согласованной с метрикой в смысле данного выше определения.

4. Рассмотрим другой вариант построения связности ∇. Векторное поле $\widetilde{X}$ на *TM* назовем горизонтальным, если $\nabla_{\widetilde{X}} y = 0$. Если отображение $H : z \to H_z$, которое каждой точке $z \in TM$ ставит в соответствие множество всех горизонтальных векторов H_z в этой точке, является нелинейной связностью на *TM*, то связность ∇ называется регулярной. В этом случае коэффициенты нелинейной связности определяются таким способом: $N_j^k = \Gamma_{jo}^k$, а условие регулярности имеет вид: $\det\left\|\delta_i^k + C_{io}^k\right\| \neq 0$, где δ_j^i – символ Кронекера.

Для нахождения коэффициентов N_j^k, а затем и Γ_{ij}^k, необходимо решить систему уравнений (1). Для того чтобы эта система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы матрица

$$H_{lk}^{im} = \delta_l^i \delta_k^m + \frac{1}{2} g^{ip} g_{op\cdot l} \delta_k^m + \frac{1}{2} g^{ip} g_{kp\cdot l} y^m - \frac{1}{2} g^{im} g_{ok\cdot l}$$

была невырожденной. Более того, для получения явного выражения Γ_{ij}^k необходима еще и матрица $\widetilde{H}_{iq}^{pk}$, обратная к H_{lk}^{im}: $\widetilde{H}_{iq}^{pk}\, H_{lk}^{im} = \delta_l^p \delta_q^m$, что существенным образом затрудняет решение задачи. Построенная таким образом связность ∇ называется связностью картановского типа, так как в финслеровом случае она совпадает со связностью Картана.

5. В качестве примеров рассмотрим обобщенное финслерово пространство F^n с метрикой [4]

$$g_{ij}(x,y) = \gamma_{ij}(x) + c\,\frac{\gamma_{ip}\gamma_{js} y^p y^s}{\gamma_{ps} y^p y^s} \tag{3}$$

и обобщенное лагранжево пространство L^n с метрикой [5]

$$g_{ij}(x,y) = \left(\gamma_{ps} y^p y^s\right)^c \gamma_{ij}, \tag{4}$$

где $\gamma_{ij}(x)$ – компоненты риманова метрического тензора, $c = const \neq -1$.

Доказана следующая

Теорема. *Для обобщенных финслеровых пространств с метриками (3) и (4) каноническая финслерова связность, связности Бервальда, Картана и связность Леви-Чивита риманова пространства с метрическим тензором γ_{ij} совпадают.*

Список литературы

1. *Рунд Х.* Дифференциальная геометрия финслеровых пространств. М., 1981.

2. *Binh T.Q.* Cartan-type connections and connection sequences // Publ. Math. 1988. V. 35. №3 – 4. P. 221 – 229.

3. *Паньженский В.И., Сурина О.П.* К геометрии обобщенного финслерова пространства со специальной метрикой// Изв. вузов. Мат. 1996. №2. С.30 – 34.

4. *Паньженский В.И.* К геометрии касательного расслоения локально конического пространства.// Изв. вузов. Мат. 1990. №10. С.71 – 74.

5. *Паньженский В.И. Сурина О.П.* Обобщенное лагранжево пространство со специальной метрикой // Материалы шк.-конф., посвящ. 130-летию со дня рожд. Д.Ф. Егорова. Казань, 1999. С. 171.

V. Panzhenskiy, O. Surina

CONNECTIONS OF METRICAL IN FISLER TYPE SPACES

Different variants of entering connections in Finsler type spaces, are considered here. It is affirmed that for the spaces with the metrics

$$g_{ij}(x,y)=\gamma_{ij}(x)+c\frac{\gamma_{ip}\gamma_{js}y^p y^s}{\gamma_{ps}y^p y^s};\ g_{ij}(x,y)=\left(\gamma_{ps}y^p y^s\right)^c\gamma_{ij}(x),\ c\neq -1$$

canonical Finsler connection, Berwald, Cartan and Levi-Chivita connections coincide.

УДК 514.76

К.В. Полякова

(*Калининградский государственный университет*)

О ЗАДАНИИ ОДНОРОДНОЙ СВЯЗНОСТИ

Модернизирован способ В.И. Близникаса задания дифференциально-геометрической связности в однородном расслоении пространства элементов Лаптева.

1. Групповая связность в пространстве элементов Лаптева. Структурные уравнения пространства элементов Г.Ф. Лаптева [1, с. 317] запишем в подробном виде [2, с. 441]:

$$D\omega^{s_0}=\omega^{p_0}\wedge\omega^{s_0}_{p_0},\tag{1}$$

$$D\omega^{s_1}=\tfrac{1}{2}C^{s_1}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+C^{s_1}_{p_1p_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{p_2}+\omega^{p_0}\wedge\omega^{s_1}_{p_0},\tag{2}$$

$$D\omega^{s_2}=\tfrac{1}{2}C^{s_2}_{p_2q_2}\omega^{p_2}\wedge\omega^{q_2}+C^{s_2}_{p_1p_2}\omega^{p_1}\wedge\omega^{p_2}+\tfrac{1}{2}C^{s_2}_{p_1q_1}\omega^{p_1}\wedge\omega^{q_1}+\omega^{p_0}\wedge\omega^{s_2}_{p_0},\tag{3}$$

где s_0=-R+1,...,0; s_1=1,...,h; s_2=h+1,...,r, $C^{s_{12}}_{p_{12}q_{12}}$ – структурные константы r-членной группы Ли G, содержащей (r-h)-членную подгруппу H, а, например, индекс q_{12} принимает значения индексов q_1 и q_2. Уравнения (1) являются структурными уравнениями гладкого многообразия – базы B. Пространство элементов Лаптева есть главное расслоение G(B), типовым слоем которого является группа G. Уравнения (1; 2) – это структурные уравнения расширенной базы M, которая является однородным расслоением G/H(B) с базой B, типовым слоем − множеством левых классов смежности G/H и структурной группой G.