V. Malakhovsky

CONGRUENCES AND COMPLEXES
OF CONICS GENERATED BY PROJECTIVE SPHERE

In 3-dimensional projective space P_3 a non-ruled surface S_o whose all first directrixes of Wilczynski contain a fixed point (projective sphere) and a surface S_1 whose all these directrixes intersect a fixed straight line (projective surface of rotation) are considered. Congruences and complexes of non-degenerating conics generated by surface S_0 are analyzed.

УДК 514.75

В.С. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ПОДМНОЖЕСТВА ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ В ОБОБЩЕННЫХ АРИФМЕТИЧЕСКИХ ПРОГРЕССИЯХ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ

Рассматриваются числовые подмножества $\left(a_n^{(k)}\right)$, определяемые рекуррентной формулой

$$a_{n+1}^{(k)} = a_n^{(k)} + d \cdot n^k, \tag{0.1}$$

где $a_1^{(k)} = p$ — нечетное простое число; d — четное положительное число $\left(p < 10^4,\ d \le 200\right)$. Показано, что при четном $k \le 20$ число d кратно 6. Дана компьютерная программа, составленная Н.В. Малаховским, определяющая для $k \le 20$, $p < 10^4$, $d \le 200$ все подмножества $\left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}\right\}$ простых чисел для $m \ge 1$.

§ 1. Обобщенная арифметическая прогрессия степени *k*

Определение 1.1. Пусть $a_1^{(k)} \in R$, $d \in R$, $k \in N$. Обобщенной арифметической прогрессией степени k с разностью d и первым членом $a_1^{(k)}$ называется числовая последовательность $\left(a_n^{(k)}\right)$, определяемая рекуррентной формулой (0.1).

При $k = 1,2,3$ последовательность $\left(a_n^{(k)}\right)$ называется соответственно линейной, квадратичной и кубичной. Используя формулу Бернулли

$$\sum_{n=1}^{m-1} n^k = \frac{1}{k+1} \sum_{s=0}^{k} C_{k+1}^s B_s m^{k+1-s}, \tag{1.1}$$

где B_s – числа Бернулли, определяемые рекуррентной формулой

$$B_0 = 1, \quad \sum_{n=0}^{k-1} C_k^n B_n = 0, \tag{1.2}$$

можно вывести формулу для *n-го* члена $a_n^{(k)}$ и суммы $S_n^{(k)}$ n членов последовательности (0.1) по заданным $a_1^{(k)}$ и d. Для $k = 1,2,3$ соответственно имеем

$$\begin{gathered} a_n^{(1)} = a_1^{(1)} + \frac{d}{2}(n-1)n, \quad S_n^{(1)} = n\left(a_1^{(1)} + \frac{d}{6}\left(n^2 - 1\right)\right), \\ a_n^{(2)} = a_1^{(2)} + \frac{d}{6}n(n-1)(2n-1), \quad S_n^{(2)} = n\left(a_1^{(2)} + \frac{d}{12}n\left(n^2 - 1\right)\right), \\ a_n^{(3)} = a_1^{(3)} + \frac{d}{4}n^2(n-1)^2, \quad S_n^{(3)} = n\left(a_1^{(3)} + \frac{d}{60}\left(n^2 - 1\right)\left(3n^2 - 2\right)\right). \end{gathered} \tag{1.3}$$

§ 2 Подмножества $m \geq 5$ простых чисел, порождаемые обобщенными арифметическими прогрессиями

В работе [1] исследованы подмножества простых чисел, определяемые обобщенными линейными арифметическими прогрессиями. Для $2 \leq k \leq 20$ составлена компьютерная программа с использованием пакета программ Maple V Release 4.00a, позволяющая для $p = a_1^{(k)} < 10^4$, $d \le 200$, $2 \le k \le 20$, где p – нечетное простое число, определять все подмножества

$$\left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}\right\} \tag{2.1}$$

простых чисел для $m \ge 1$ и при заданном k – число таких подмножеств с конкретным значением для m. Для использования программы вместо K необходимо подставить последовательно числа 2,3,…,20 и запустить программу.

```
> N:=1:
> for i from 2 by 2 while i<=200
> do for j from 2 while j<=1229
> do p:=[ithprime(j)]:n:=0:
> while nops(p)<>0
> do p:=select(isprime,map(proc(x) x+i*n^K end,p)):
> n:=n+1:k[n]:=op(p)
> od:
> if n>=5 then S[n–1]:=[op(S[n–1]),['d'=i,[seq(k[j],j=1..n–1)]]] fi:
> if n>N then N:=n–1 fi:
> od:
> od:seq(print('m'=j,`число групп`=nops(S[j])–1),j=5..N);
> seq([print(`———`),print(S[j])],j=5..N): restart:
```

Используя данную компьютерную программу для $m \ge 5$, можно составить таблицу числа этих подмножеств для заданных k и m:

m \ k	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
5	563	1357	103	911	240	542	46	523	127	254	20	154	67	226	11	118	44	76	9
6	137	533	22	285	66	186	12	151	21	51	1	29	10	28	1	9	5	16	1
7	76	148	17	95	3	42	3	39	0	10	0	3	0	1	0	0	0	2	0
8	51	96	2	33	0	14	1	8	0	0	0	2	0	2	0	0	0	2	0
9	17	62	0	7	0	3	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	7	30	1	4	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	11	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
14	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Анализируя эту таблицу, убеждаемся, что для каждого $5 \le m \le 14$ число подмножеств (2.1) для нечетной степени k значительно больше, чем для четной, причем с возрастанием степени число подмножеств естественно уменьшается, а для $k > 7$ нет ни одного подмножества с десятью и более простыми числами. Однако для $m = 5$ и $m = 6$ выделяется много подмножеств и при больших степенях k. Например, с пятью простыми числами для $k = 15$ и $k = 17$ имеется соответственно 226 и 118 таких подмножеств.

Рассматривая для $m \ge 5$, $2 \le k \le 60$, $a_1^{(k)} = p < 10^4$, $d \le 200$ все подмножества (2.1), убеждаемся в справедливости следующих теорем:

Теорема 2.1. *При любом четном* k $(2 \le k \le 20)$ *подмножества (2.1) порождаются обобщенными арифметическими прогрессиями* $\left(a_n^{(k)}\right)$ *с разностью* d, *кратной только 6.*

Теорема 2.2. *При* $k = 8$ *и* $k = 16 + 4h$, $\left(h = \overline{0,11}\right)$, $m \ge 5$ *разность* d *кратна только 30.*

Общий член $a_n^{(k)}$ последовательности (0.1) образует многочлен степени $k+1$ со свободным членом $a_1^{(k)}$ и множителем $d \cdot n$ перед полиномом от n.

Формулы (1.3) определяют $a_n^{(1)}$, $a_n^{(2)}$, $a_n^{(3)}$. Для $k = 4,5,6,7$ имеем:

$$\begin{gathered}
a_n^{(4)} = a_1^{(4)} + \frac{d}{30} n(n-1)(2n-1)\left(3n^2 - 3n - 1\right), \\
a_n^{(5)} = a_1^{(5)} + \frac{d}{12} n^2 (n-1)^2 \left(2n^2 - 2n - 1\right), \\
a_n^{(6)} = a_1^{(6)} + \frac{d}{42} n(n-1)(2n-1)\left(3n^4 - 6n^3 + 3n + 1\right), \\
a_n^{(7)} = a_1^{(7)} + \frac{d}{24} n^2 (n-1)^2 \left(3n^4 - 6n^3 - n^2 + 4n + 2\right).
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Значения многочленов (1.3) и (2.2) при $n = 1,2,...,m$ определяют подмножества (0.1) m простых чисел. Например, полагая, что $a_1^{(2)} = 271$, $d = 108$; $a_1^{(3)} = 3631$, $d = 70$; $a_1^{(4)} = 241$, $d = 30$; $a_1^{(5)} = 1453$, $d = 28$; $a_1^{(6)} = 4241$, $d = 42$; $a_1^{(7)} = 3391$, $d = 70$, и используя формулы (1.3) и (2.1), получим следующие подмножества простых чисел соответственно для $k = 2,3,4,5,6,7$:

{271, 379, 811, 1783, 3511, 6211, 10099, 15391, 22303, 31051, 41851, 54919};
{3631, 3701, 4261, 6151, 10631, 19381, 34501, 58511, 94351, 145381, 215381, 308551, 429511, 583301};
{241, 271, 751, 3181, 10861, 29611, 68491, 140521, 263401, 460231, 760231};
{1453, 1481, 2377, 9181, 37853, 125353, 343081, 813677, 1731181, 3384553};
{4241, 4283, 6971, 37589, 209621, 865871, 2825423};
{3391, 3461, 12421, 165511, 1312391, 6781141, 26376661, 84024671, 230825311, 565633141}.

Замечание. Анализируя формулы для суммы *k*-*x* степеней первых *n* натуральных чисел $\left(k = \overline{1...15}\right)$, убеждаемся, что сумма нечетных степеней ($k = 5, 7, 9, 11, 13, 15$) *n* чисел, умноженная соответственно на 3, 6, 5, 6, 105, 12, делится без остатка на сумму кубов этих чисел, сумма четных степеней ($k = 4, 6, 8, 10, 12, 14$), умноженная соответственно на 5, 7, 15, 11, 455, 15, делится без остатка на сумму квадратов этих чисел, а квадрат суммы *n* первых натуральных чисел равен сумме кубов этих чисел.

Список литературы

Малаховский В.С. Об одной рекуррентной формуле, порождающей подмножества простых чисел // Диф. геом. многообр. фигур, Калининград, 2004. №31. С. 79—84.

V. Malakhovsky

SUBSETS OF PRIME NUMBERES IN GENERALIZED ARITHMETICAL PROGRESSION OF HIGH ORDER

Sequenses $\left(a_n^{(k)}\right)$ of numbers defined by recurrent relation $a_{n+1}^{(k)} = a_n^{(k)} + d \cdot n^k$, where $a_1^{(k)} = p$ is an odd prime number and d is an even positive number are considered ($k \leq 20$, $p < 10^4$, $d \leq 200$). It is shown that for even k the number d for each subset $\left\{a_1^{(k)}, a_2^{(k)}, \ldots, a_m^{(k)}\right\}$ of prime numbers where $m \geq 5$ is divisible by 6.

УДК 514.75

Н.В. Малаховский

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

КОМПЬЮТЕРНЫЕ ПРОГРАММЫ ИССЛЕДОВАНИЯ МЕТОДОМ КАРТАНА МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР В ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Разработаны компьютерные программы исследования систем пфаффовых уравнений в однородных и обобщенных пространствах, позволяющие установить совместность или несовместность исходной системы, определить (в случае совместности) произвол ее решения. Рассмотрены конкретные примеры применения данных в работе компьютерных программ к исследованию поверхностей в евклидовом и проективном пространствах и конгруэнций эллипсоидов в аффинном пространстве.

Интенсивное развитие компьютерной техники и совершенствование методов программирования способствовали