2. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. "Труды геом.семинара", М., ВИНИТИ АН СССР, 1971, т.3, 193-220

3. Похила М.М., Пары многообразий квадратичных элементов в n-мерном проективном пространстве. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур", вып.2, 1971, 43-54.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.5 1974

Т к а ч Г.П.

РАССЛОЯЕМЫЕ ПАРЫ КОНГРУЭНЦИЙ ФИГУР, ПОРОЖДЕННЫХ ПАРАБОЛОЙ И ТОЧКОЙ.

§1. Расслояемые пары T.

В трехмерном эквиаффинном пространстве рассмотрим двупараметрическое семейство пар фигур $\{F_1, F_2\}$, где F_1 - парабола, а $F_2 \equiv B$ -точка не инцидентная плоскости параболы. Назовем такое многообразие парой T.

Из рассмотрения исключается случай, когда касательная плоскость α_B к поверхности (B) касается параболы F_1 или параллельна плоскости параболы.

Отнесем пару T к каноническому реперу $R=\{A,\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ Вершина A репера выбирается в такой точке параболы F_1, в которой касательная ℓ' к параболе параллельна прямой m, линии пересечения плоскости α_B с плоскостью параболы, $\bar{e}_3 = \overline{AB}$, вектор $\bar{e}_1$ направлен по диаметру параболы, причем конец его M_0 лежит на линии m, вектор $\bar{e}_2$ направлен по касательной к параболе в точке A.

Деривационные формулы репера R имеют вид:

$$dA=\omega^{\alpha}e_{\alpha},\quad d\bar{e}_{\alpha}=\omega_{\alpha}^{\beta}\,\bar{e}_{\beta},\quad (\alpha,\beta,\gamma=1,2,3),\tag{1.1}$$

причем формы Пфаффа ω^{α}, ω_{α}^{β} удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega^{\alpha}=\omega^{\beta}\wedge\omega_{\beta}^{\alpha},\quad \mathcal{D}\omega_{\alpha}^{\beta}=\omega_{\alpha}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}^{\beta}\tag{1.2}$$

и условию эквиаффинности

$$\omega_1^1+\omega_2^2+\omega_3^3=0.\tag{1.3}$$

Исключая из рассмотрения случай, когда в расширенном аффинном пространстве число параметров, от которых зависят несобственные прямые плоскостей парабол понижается, т.е. становится меньше двух, примем формы Пфаффа

$$\omega_i=\omega_i^3$$

за независимые первичные формы пары T.

Уравнения параболы и система уравнений Пфаффа относительно канонического репера R примут вид:

$$(x^2)^2-2px^1=0,\ x^3=0,\tag{1.4}$$

$$\omega^{\alpha}=\Gamma^{\alpha k}\omega_k,\quad \omega_j^i=\Gamma_j^{ik}\omega_k,\quad \omega_3^i=\Gamma_3^{ik}\omega_k,$$

$$\omega_1^1=\Gamma_1^{1k}\omega_k,\quad d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2=\Gamma^k\omega_k,\tag{1.5}$$

$$\omega^1+\omega^3+\omega_3^1+\omega_3^3=0,\quad (i,j,k=1,2).$$

Здесь и в дальнейшем $i\neq j$ и по этим индексам суммирование не производится.

Анализируя систему (I.5), находим, что пара T существует и определяется с произволом восьми функций двух аргументов.

О п р е д е л е н и е I. Расслояемой парой T называется пара T, обладающая следующими свойствами: I/ прямолинейные конгруэнции (ℓ') и (BM_0) образуют двусторонне расслояемую пару, 2/ существуют односторонние аффинные расслоения от конгруэнции (F_1) и прямолинейной конгруэнции (AB) к конгруэнции (α_B)[I].

Т е о р е м а I. Расслояемая пара T существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для расслояемой пары T выполняются условия:

$$\omega^1+\omega^3=0,\quad \omega_2^1=0.\tag{1.6}$$

$$\begin{gathered}(d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2-\omega_1+2\vartheta)\wedge\omega_2=0,\\ \omega^1\wedge\vartheta+\omega^2\wedge\omega_2=0,\quad \omega_1\wedge\vartheta-\omega_1^2\wedge\omega_2=0,\\ (2\omega^1+\omega_3^1)\wedge\vartheta=0,\quad (2\omega^2+\omega_3^2)\wedge\omega_2=0,\\ (\omega_1^2-\omega_3^2)\wedge\omega_2=0,\quad (\omega_1^2-\omega_3^2)\wedge\omega^1=0,\end{gathered}\tag{1.7}$$

где

$$\vartheta=\omega_1+\omega_1^1.$$

Из последних двух уравнений системы (I.7) получаем конечные соотношения

$$\Gamma_1^{21}-\Gamma_3^{21}=0,\tag{1.8}$$

$$\Gamma^{11}(\Gamma_1^{22}-\Gamma_3^{22})=0. \tag{1.9}$$

Так как прямые ℓ' расслояемой пары T образуют конгруэнцию, то ранг матрицы

$$\begin{Vmatrix} \Gamma^{11} & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma^{12} & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{1.10}$$

равен двум, следовательно,

$$\Gamma^{11}\neq 0. \tag{1.11}$$

Соотношение (I.9) приводится к виду .

$$\Gamma_1^{22}-\Gamma_3^{22}=0. \tag{1.12}$$

ИЗ (I.8) и (I.12) имеем

$$\omega_1^2-\omega_3^2=0. \tag{1.13}$$

Замыкание уравнения (I.13) дает квадратичное уравнение

$$\omega_3^2\wedge\vartheta=0. \tag{1.14}$$

Присоединяя (I.14) к системе (I.7) и преобразуя её, получаем

$$\begin{gathered}\Gamma^1=-(1+2\Gamma_1^{11}), \quad 2\Gamma^{21}=-\Gamma_3^{21},\\ \Gamma_1^{12}=\Gamma_1^{21}=\Gamma_3^{21}, \quad \Gamma_3^{1}=\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11}),\\ (1+\Gamma_1^{11})\left[2\Gamma^{12}+\Gamma_3^{12}(1-2\Gamma^{11})\right]=0,\\ (1+\Gamma_1^{11})\left[\Gamma_3^{22}-(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]=0.\end{gathered} \tag{1.15}$$

Рассмотрим случай

$$1+\Gamma_1^{11}=0.$$

Тогда

$$\vartheta=0,$$

а это противоречит тому, что многообразие плоскостей α_B должно быть двумерным. Следовательно,

$$1+\Gamma_1^{11}\neq 0. \tag{1.16}$$

Из (I.15) имеем:

$$\begin{gathered}\Gamma^{12}=\tfrac{1}{2}\Gamma_3^{12}(2\Gamma^{11}-1),\\ \Gamma_3^{22}=(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11}).\end{gathered} \tag{1.17}$$

Продолжая систему уравнений

$$\omega_3^1=\Gamma_3^{12}\omega_2, \quad \omega_3^2=\Gamma_3^{12}\vartheta,$$

получим

$$d\Gamma_3^{12}=0.$$

Следовательно

$$\Gamma_3^{12}=\mathrm{Const}.$$

Замкнутая система уравнений, определяющая расслояемую пару T запишется в виде:

$$\omega^1+\omega^3=0,\quad \omega_3^1+\omega_3^3=0,\quad \omega_2^1=0,\quad \omega_1^2-\omega_3^2=0,$$

$$\omega_3^1=\Gamma_3^{12}\omega_2,\quad \omega_3^2=\Gamma_3^{12}\vartheta,\quad \omega_2^2=-\Gamma_1^{11}(\omega_1+\omega_3^1),$$

$$\omega^1=\Gamma^{11}(\omega_1+\omega_3^1)-\tfrac{1}{2}\omega_3^1,\quad \omega^2=-\tfrac{1}{2}(1+\Gamma_1^{11})\Gamma_3^{12}\omega_1+\Gamma^{22}\omega_2, \tag{1.18}$$

$$d\ln p-\omega_1^1+2\omega_2^2=-(1+2\Gamma_1^{11})\omega_1+\Gamma^2\omega_2,\quad d\Gamma_3^{12}=0,$$

$$d\Gamma_1^{11}\wedge(\omega_1+\omega_3^1)-\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})\,\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

$$d\Gamma^{11}\wedge(\omega_1+\omega_3^1)-\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})\Gamma^{11}\,\omega_1\wedge\omega_2=0, \tag{1.19}$$

$$d\Gamma^{22}\wedge\omega_2-\left[2\Gamma^{22}\Gamma_1^{11}-\tfrac{1}{2}(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]\omega_1\wedge\omega_2=0,$$

$$d\Gamma^2\wedge\omega_2-2d\Gamma_1^{11}\wedge\omega_1+\left[4\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})-\Gamma^2\Gamma_1^{11}\right]\omega_1\wedge\omega_2=0.$$

Система (I.I8),(I.I9) - в инволюции и определяет решение с произволом четырех функций одного аргумента.

Т е о р е м а 2. Расслояемые пары T обладают следующими свойствами: I/точка A является фокальной точкой параболы F_1, 2/конгруэнция (BM_0)-цилиндрическая. Касательные на поверхности (C) (где C -середина отрезка AB) к линиям, соответствующим линиям тени на поверхности (B), параллельны вектору $\bar{e}_2$, 3/координатные линии $\omega_2=0$ соответствуют одному семейству торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ'), 4/существует одностороннее аффинное расслоение от прямолинейной конгруэнции (AM_0) к конгруэнции (α_B).

Д о к а з а т е л ь с т в о. I/Система уравнений для определения фокальных точек параболы F_1 конгруэнции (F_1) приводится к виду

$$(x^2)^2-2px^1=0,\quad x^3=0,$$

$$\begin{aligned}x^2\Big\{&(x^2)^4(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})+(x^2)^3p\left[\Gamma^2-2\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})+\right.\\&\left.+(x^2)^2 2p\left[\Gamma^{22}+p(1+2\Gamma_1^{11})+\Gamma_3^{12}(1+\Gamma_1^{11})(2-\Gamma^{11})-\tfrac{1}{2}\Gamma_3^{12}\Gamma_1^{11}(2\Gamma^{11}-1)\right]-\right.\\&-x^2 2p^2\left[\Gamma^{11}\Gamma^2+\tfrac{1}{2}(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma_1^{11})\right]+4p^2\left[\Gamma^{11}(p-\Gamma^{22})-(\Gamma_3^{12})^2(1+\Gamma^{11})(2\Gamma^{11}-1)\right]\Big\}=0.\end{aligned} \tag{1.20}$$

откуда непосредственно следует, что точка A -фокальная.

2/Имеем:

$$d(\bar{e}_1-\bar{e}_3)=(\omega_1+\omega_3^1)(\Gamma_1^{11}\bar{e}_1+\bar{e}_3).$$

$$dC=\Gamma^{11}(\omega_1+\omega_3^1)(\bar{e}_1-\bar{e}_3)+(\omega^2+\tfrac{1}{2}\omega_3^2)\bar{e}_2.$$

Отсюда следует, что торсы $\omega_1+\omega_3^1=0$ прямолинейной конгруэнции (BM_0) являются цилиндрическими поверхностями и что касательные к линиям $\omega_1+\omega_3^1=0$ на поверхности (C), соответствующим линиям тени поверхности (B), параллельны вектору $\bar{e}_2$.

Данное утверждение следует из рассмотрения уравнения торсов прямолинейной конгруэнции (ℓ'):

$$\omega^1\omega_2=0.$$

4/Условия одностороннего аффинного расслоения от прямолинейной конгруэнции (AM_0) к конгруэнции (α_B) приводятся к виду:

$$\omega_1 \wedge \vartheta - \omega_1^2 \wedge \omega_2 = 0,$$

$$\omega^1 \wedge \vartheta + \omega^2 \wedge \omega_2 = 0. \tag{1.21}$$

Квадратичные уравнения (I.2I) полностью содержатся в системе (I.7). Теорема доказана.

§2. Пары T^*.

Определение 2. Парой T^* называется расслояемая пара T, у которой поверхность (M_0) является огибающей плоскостей парабол F_1 и линии $\omega_1 \pm \omega_2 = 0$ асимптотические линии поверхности (A).

Теорема 3. Пара T^* существует и определяется с произволом одной функции одного аргумента.

Доказательство. Пара T^* определяется системой уравнений (I.I8), (I.I9) и условиями

$$\omega^3 + \omega_1 = 0, \tag{2.1}$$

$$1 + \Gamma_1^{11} + \Gamma^{22} = 0. \tag{2.2}$$

Учитывая (2.I) и (2.2) в системе уравнений (I.I8), (I.I9) запишем замкнутую систему дифференциальных уравнений пары T^*:

$$\omega^1 + \omega^3 = 0, \quad \omega_3^3 = 0, \quad \omega_j^i = 0, \quad \omega_3^i = 0,$$

$$\omega^1 = \omega_1, \quad \omega^2 = -(1+a)\,\omega_2, \quad \omega_1^1 = a\,\omega_1, \tag{2.3}$$

$$d\ln\rho - 3\,\omega_1^1 = -(1+2a)\,\omega_1 + \Gamma^2\omega_2, \quad \frac{1}{2}\,d\ln a = \vartheta,$$

$$d\Gamma^2 \wedge \omega_2 - a\,\Gamma^2 \omega_1 \wedge \omega_2 = 0, \tag{2.4}$$

где

$$a = \Gamma_1^{11}.$$

Из (2.3) и (2.4) непосредственно следует, что произвол существования пары T^* – одна функция одного аргумента.

Теорема 4. Пары T^* обладают следующими свойствами: I/координатная сеть на поверхности (M_0)-сопряжена, 2/асимптотические линии на поверхностях (A), (B) и (M_0) соответствуют, 3/существуют только четыре фокальные точки параболы F_1 конгруэнции (F_1), 4/прямая AB является общей аффинной нормалью поверхностей (A) и (B), 5/аффинная нормаль поверхности (M_0) лежит в координатной плоскости $x^2 = 0$, 6/аффинные нормали поверхностей (A) и (M_0) пересекаются в точке $\bar N = \bar A - \frac{1}{a}\bar e_3$, координатная сеть на поверхности (N) -сопряжена, 7/конгруэнция аффинных нормалей поверхности (M_0)-цилиндрическая, причем собственный фокус луча этой конгруэнции является серединой отрезка NM_0, 8/поверхности (A) и (B) -инвариантные квадрики.

Доказательство. I/-2/ утверждения теоремы непосредственно следуют из рассмотрения уравнения

$$(\omega_1)^2 - (\omega_2)^2 = 0, \tag{2.5}$$

которое определяет асимптотические линии на поверхностях (A), (B) и (M_0).

3/Уравнения (I.20), определяющие фокальные точки параболы

F_1, пары $T^\varkappa$ примут вид:

$$(x^2)^2 - 2\rho x^1 = 0, \quad x^3 = 0,$$

$$x^2\{(x^2)^3\rho\Gamma^2 + 2\rho(x^2)^2[\rho(1+2a)-(1+a)] + 4\rho^3\} = 0,$$

откуда следует утверждение теоремы.

Следствие. В расширенном аффинном пространстве несобственная точка параболы F_1 является сдвоенной фокальной точкой.

4/Вектор аффинной нормали поверхности (A)

$$\bar{\ell} = \{0, 0, 1\}$$

совпадает с вектором аффинной нормали поверхности (B), то есть, прямая AB -общая аффинная нормаль этих поверхностей.

5/-6/ Уравнения аффинных нормалей поверхностей (A) и (M_o) запишутся в виде

$$x^1 = 0, \quad x^2 = 0,$$

$$x^1 - a x^3 - 1 = 0, \quad x^2 = 0.$$

Точка пересечения этих аффинных нормалей определяется формулой:

$$\bar{N} = \bar{A} - \frac{1}{a}\bar{e}_3 \qquad (2.6)$$

Уравнение асимптотических линий поверхности (N) имеет вид:

$$\frac{4+a}{a}(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2 = 0,$$

откуда следует, что координатная сеть линий на поверхности (N) -сопряжена.

7/Уравнения для определения фокусов

$$\bar{F} = \bar{M}_o + \lambda(a\bar{e}_1 + \bar{e}_3) \qquad (2.7)$$

и торсов конгруэнции аффинных нормалей поверхности (M_o) соответственно примут вид:

$$2a\lambda + 1 = 0, \qquad (2.8)$$

$$a\omega_1\omega_2 = 0. \qquad (2.9)$$

Из (2.8) и (2.9) следует, что конгруэнция аффинных нормалей-цилиндрическая, т.е. одно семейство её торсов состоит из цилиндров.

Середина K отрезка M_oN определяется формулой:

$$\bar{K} = \bar{A} + \frac{1}{2}\bar{e}_1 - \frac{1}{2a}\bar{e}_3.$$

Из (2.7) и (2.8) находим, что K -собственный фокус луча конгруэнции (M_oN) аффинных нормалей поверхности (M_o).

8/Асимптотические линии поверхности (A) определяются уравнением (2.5), векторы

$$\bar{E}_i = \bar{e}_1 - \bar{e}_3 + (-1)^i(1+a)\bar{e}_2 \quad - \qquad (2.10)$$

- векторы касательных к этим линиям.

Имеем

$$d\bar{E}_1 = a\omega_1\bar{e}_1 - a(1+a)\omega_1\bar{e}_2 + [\omega_1 + (1+a)\omega_2]\bar{e}_3$$

Следовательно,

$$(d\bar{E}_1)_{\omega_1 - \omega_2 = 0} = a\omega_1\bar{E}_1,$$

значит линии $\omega_1 - \omega_2 = 0$ -прямые.

Аналогично, для вектора касательной $\bar{E}_2$ к линии $\omega_1 + \omega_2 = 0$, имеем

$$(d\bar{E}_2)_{\omega_1+\omega_2=0} = a\omega_1 \bar{E}_2 .$$

Так как поверхность (A) имеет две серии прямолинейных образующих, то она является квадрикой. Её уравнение имеет вид:

$$Q_A \equiv 2(1+a)(x^1+x^3) - (1+a)^2 (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0. \qquad (2.11)$$

Учитывая уравнения стационарности

$$dx^\alpha = -x^\beta \omega_\beta^\alpha - \omega^\alpha$$

точки аффинного пространства, убеждаемся, что

$$dQ_A = 2a\omega_1 Q_A .$$

Следовательно, Q_A -инвариантная квадрика.

Аналогично доказываем, что поверхность (B) -квадрика. Её уравнение имеет вид:

$$Q_B \equiv 2(1+a)(x^1+x^3-1) - (1+a)^2 (x^1)^2 + (x^2)^2 = 0 . \quad (2.12)$$

Так как

$$dQ_B = 2a\omega_1 Q_B ,$$

то квадрика (2.I2)-инвариантна.

Л и т е р а т у р а

I. Ткач Г.П., О некоторых классах аффинно расслояемых пар конгруэнций фигур в трехмерном эквиаффинном пространстве.

"Дифференциальная геометрия многообразий фигур", Калининград, I973, вып.3, с.I43-I52.

2. Фиников С.П., Теория пар конгруэнций. ГИТТЛ, М., I956,

3. Малаховский В.С., Расслояемые пары конгруэнций фигур. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. (Тр. Калининградского ун-та), I97I, 2, 5-I9.