ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.I0 1979

УДК 513.73

Ю.И.Ш е в ч е н к о

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ НА ПОВЕРХНОСТИ

Нормализация А.П.Нордена поверхности проективного пространства позволяет определить параллельные перенесения касательной и нормальной прямой. Если соприкасающаяся плоскость не заполняет всего пространства, то дополнительное оснащение поверхности дает возможность уточнить параллельное перенесение А.В.Чакмазяна в случае, когда нормальная прямая принадлежит соприкасающейся плоскости.

Проективное пространство P_n размерности n относится к подвижному реперу $\{A_0, A_J\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA_0 = \theta A_0 + \omega^J A_J \quad (J, \mathcal{J}, K = \overline{1,n}),$$

$$dA_J = \theta A_J + \omega_J^K A_K + \omega_J A_0,$$

где инвариантные формы проективной группы $\omega^J, \omega_J^K, \omega_J$ удовлетворяют структурным уравнениям (см., например, [1]):

$$\mathcal{D}\omega^J = \omega^K \wedge \omega_K^J, \quad \mathcal{D}\omega_J = \omega_J^K \wedge \omega_K,$$

$$\mathcal{D}\omega_J^K = \omega_J^{\mathcal{J}} \wedge \omega_{\mathcal{J}}^K + (\delta_J^K \omega_{\mathcal{J}} + \delta_{\mathcal{J}}^K \omega_J) \wedge \omega^{\mathcal{J}}.$$

§ I. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПЕРЕНЕСЕНИЯ А.П.НОРДЕНА И А.В.ЧАКМАЗЯНА

В пространстве P_n рассмотрим m-мерную поверхность X_m как многообразие касательных плоскостей [2],

что отразим соответствующей специализацией репера

$$R_1 = \{A_0, A_i, A_a\}; \; i, j, k = \overline{1,m}; \; a, b = \overline{m+1,n},$$

где вершины A_0, A_i помещены на касательную плоскость T_m, причем вершина A_0 -в её центр.

Произведем нормализацию поверхности X_m в смысле А.П.Нордена [3]. Нормаль I рода P_{n-m}, пересекающую касательную плоскость T_m лишь в её центре, зададим системой уравнений

$$x^i - \lambda_a^i x^a = 0,$$

где функции λ_a^i удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\lambda_a^i + \omega_a^i = \lambda_{aj}^i \omega^j,$$

а дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\lambda_a^i = d\lambda_a^i - \lambda_b^i \omega_a^b + \lambda_a^j \omega_j^i.$$

Нормаль II рода P_{m-1}, принадлежащую касательной плоскости T_m и не проходящую через её центр, зададим совокупностью точек

$$B_i = A_i + \lambda_i A_0 \quad (\nabla\lambda_i + \omega_i = \lambda_{ij}\omega^j).$$

Н.М.Остиану [4] показала, что поле нормалей I рода порождает оснащение Картана [7] поверхности X_m. Плоскость Картана определяется совокупностью точек

$$B_a = A_a + \lambda_a^i A_i + \lambda_a A_0,$$

где функции λ_a охватываются по формулам, приведенным в работе [5].

Прямая, принадлежащая касательной плоскости T_m и проходящая через ее центр, определяется точкой $B = \xi^i B_i$ на нормали II рода. Дифференциал точки B можно представить в виде

$$dB=\theta B+(\dots)A_0+(\dots)^a B_a+(\nabla\xi^i-\Gamma^i_{jk}\xi^j\omega^k-\xi^i\lambda_j\omega^j)A_i,$$

где Γ^i_{jk} – объект касательной линейной связности, охват которого приведен в статье [5]. Касательная прямая переносится параллельно [3] в линейной связности, определяемой объектом Γ^i_{jk}, когда смещение точки B лежит в плоскости, натянутой на эту точку и нормаль I рода. Из предыдущей формулы получаем условия параллельного перенесения

$$\nabla\xi^i-\Gamma^i_{jk}\xi^j\omega^k=(\vartheta+\lambda_j\omega^j)\xi^i,$$

где линейная форма ϑ играет роль множителя пропорциональности.

З а м е ч а н и е I. В связи с тем, что нашему объекту Γ^i_{jk} дана та же геометрическая характеристика, что у А.П. Нордена для аналогичного объекта другой природы, можно говорить о различных аналитических описаниях одной и той же связности.

Прямая, принадлежащая нормали I рода и проходящая через центр касательной плоскости, задается точкой $C=\xi^a B_a$ на плоскости Картана. Дифференциал точки C можно представить в виде

$$dC=\theta C+(\dots)A_0+(\dots)^i A_i+(\nabla\xi^a-\Gamma^a_{bi}\xi^b\omega^i-\xi^a\lambda_i\omega^i)A_a,$$

где Γ^a_{bi} – объект нормальной линейной связности, охват которого приведен в работе [5]. Нормальная прямая переносится параллельно [6] в линейной связности, определяемой объектом Γ^a_{bi}, когда смещение точки C лежит в плоскости, натянутой на эту точку и касательную плоскость. Условия параллельного переноса имеют вид

$$\nabla\xi^a-\Gamma^a_{bi}\xi^b\omega^i=(\vartheta+\lambda_i\omega^i)\xi^a.$$

З а м е ч а н и е 2. Конструкция параллельного перенесения А.В. Чакмазяна изложена здесь с некоторой модификацией в менее канонизированном репере.

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПЕРЕНЕСЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ ПРЯМОЙ, ПРИНАДЛЕЖАЩЕЙ СОПРИКАСАЮЩЕЙСЯ ПЛОСКОСТИ.

В случае выполнения неравенства $n>\frac{1}{2}m(m+3)$ поверхность X_m пространства можно рассматривать как многообразие пар касательной и соприкасающейся плоскости. Отразим это дальнейшей специализацией подвижного репера

$$R_2=\{A_0,A_i,A_\alpha,A_u\};\ \alpha,\beta=\overline{m+1,\tfrac{1}{2}m(m+3)};\ u=\overline{\tfrac{1}{2}m(m+3)+1,n};$$

а именно, поместим вершины A_α на соприкасающуюся плоскость $T_{\frac{1}{2}m(m+3)}$.

Произведем обобщенную нормализацию поверхности X_m [5], т.е. зададим дополнительно нормаль III рода $P_{n-\frac{1}{2}m(m+1)}$, пересекающую соприкасающуюся плоскость по касательной плоскости. Известно, что обобщенная нормализация позволяет выделить плоскость $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$, принадлежащую соприкасающейся плоскости и не имеющую общих точек с касательной, и плоскость $P_{n-\frac{1}{2}m(m+3)-1}$, не имеющую общих точек с соприкасающейся плоскостью. Эти плоскости определяются совокупностями точек B_α и B_u (см. [5, с.145]).

Прямая, принадлежащая соприкасающейся плоскости, проходящая через центр касательной плоскости, но не лежащая в ней, задается точкой $B=\xi^\alpha B_\alpha$ на плоскости $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$. Дифференциал точки B можно представить в виде

$$dB=\theta B+(\dots)A_0+(\dots)^i A_i+(\dots)^u B_u+(\nabla\xi^\alpha-\Gamma^\alpha_{\beta i}\xi^\beta\omega^i-\xi^\alpha\lambda_i\omega^i)A_\alpha,$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta i}$ – объект линейной связности, охват которого приведен в статье [5]. Заметив, что нормаль III рода задается точками A_0, A_i, B_u, дадим

О п р е д е л е н и е. Нормальная прямая, принадлежащая соприкасающейся плоскости, переносится параллельно в линейной связности, определяемой объектом $\Gamma^{\alpha}_{\beta i}$, когда ее точка пересечения с плоскостью $P_{\frac{1}{2}(m^2+m-2)}$ смещается в плоскости, натянутой на эту точку и нормаль III рода. Условия параллельного перенесения имеют вид

$$\nabla\xi^{\alpha}-\Gamma^{\alpha}_{\beta i}\xi^{\beta}\omega^{i}=(\vartheta+\lambda_{i}\omega^{i})\xi^{\alpha}.$$

Этим, в частности, обосновывается необходимость введения нормали III рода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л у м и с т е Ю.Г. Проективные связности в канонических расслоениях многообразий плоскостей.- Матем.сб. , 1973, т.91, № 2, с.211-233.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.- Тр.Московск.матем.о -ва , т.2, 1953, с.275-382.

3. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности. М., Наука, 1976

4. О с т и а н у Н.М. О геометрии многомерной поверхности проективного пространства.- Тр.геометр.семинара , т.1, М., 1966, с.239-263.

5. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащениях многомерной поверхности проективного пространства.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.8, Калининград, 1977 , с.135-150.

6. Ч а к м а з я н А.В. Нормализованное по Нордену многообразие с параллельным полем нормальных направлений в P_n.- Докл. АН СССР, 1977, т.236, № 4, с.816-819.

7. Cartan E. Les espaces a connexien projective. - Тр.Семинара по векторному и тензорному анализу , 1937, вып. 4, с.147-159.

С Е М И Н А Р

по дифференциальной геометрии многообразий фигур при Калининградском государственном университете

В предыдущих выпусках освещена работа семинара до 25 мая 1978 года.

Ниже приводится план работы семинара с 18 октября 1978 года по 23 мая 1979 года.

18.10.1978г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Об относительности понятия оснащения эквипараметрического многообразия.

25.10.1978г. Б.А.А н д р е е в. О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n (m>n)$.

1.11.1978г. Ю.И.П о п о в. О фундаментальных объектах регулярной гиперполосы аффинного пространства.

15.11.1978г. В.С.М а л а х о в с к и й. Некоторые классы конгруэнций квадрик в P_3.

22.11.1978г. В.И.М я г к о в (г.Хмельницкий). О расслоении комплексов в нормальные конгруэнции.

29.11.1978г. В.В.М а х о р к и н. Пучки топологических пространств и когомологии.

13.12.1978г. Л.Е.Е в т у ш и к (г.Москва). О геометрии дифференциальных уравнений в частных производных.

20.12.1978г. Л.Е.Е в т у ш и к (г.Москва). О геометрии дифференциальных уравнений в частных производных.

14.2.1979г. Л.Г.К о р с а к о в а. Об одном классе расслояемых пар конгруэнций кривых второго порядка в P_3.

21.2.1979г. В.П.Ц а п е н к о. Об одном классе конгруэнций $(P, Q)_{2,2}$.

28.2.1979г. М.В.К р е т о в. Комплексы эллипсоидов в аффинном пространстве.

14.3.1979г. А.В.М а х о р к и н. Система дифференциальных уравнений Пфаффа одного класса комплексов квадрик в P_3.

21.3.1979г. Е.В.Скрыдлова. Об одном классе вырожденных конгруэнций, порожденных квадрикой и прямой.

28.3.1979г. В.Н.Х у д е н к о. О многообразиях многомерных квадрик.

4.4.1979г. Ю.И.Ш е в ч е н к о. Параллельные перенесения на поверхности.

11.4.1979г. Г.Л.С в е ш н и к о в а. Об одном однопараметрическом семействе квадрик Ли.

18.4. Ж.Г.Г о в о р к о в а. Вырожденные конгруэнции, порожденные квадрикой и прямой.

25.4.1979г. С.В.К и ш т а н о в а. Конгруэнции линейчатых квадрик в P_3 с вырождающимися фокальными поверхностями.

16.5.1979г. О.П.К о н о в а. Конгруэнции параболических цилиндров.

23.5.1979г. М.Н.Г е р а щ е н к о в а. Конгруэнции нецентральных квадратичных элементов.

УДК 513.73

О распределении линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n$ $(m > n)$. А н д р е е в Б.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 5-9.

Изучается распределение линейных элементов, порожденных отображением $f: P_m \to A_n (m > n)$. Введены новые понятия: главных точек и индикатрисы.

Библиография: 7 названий.

УДК 513.73

О четыре-ткани, порожденной асимптотическими распределениями на трехмерной поверхности в P_5. Б а у м а р а т о в Х.А. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 10-15.

Изучаются поверхности V_3 пятимерного проективного пространства, у которых четыре семейства асимптотических распределений оказываются голономными.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Пространство псевдореперов. В е д е р н и к о в В.И. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 16-21.

Определено пространство псевдореперов, изучаются его полиномиальные морфизмы, устанавливается редуктивность.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Геометрия основного пространства. В е д е р н и к о в С.В. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 22- 29.

Изучается орбита G -пространства $M(n+1)$ множества квадратных матриц $(n+1)$-го порядка. Вводится понятие поля основных элементов.

Библиография: 3 названия.

УДК 513.73

Взаимно-полярные три-ткани Боля гиперболического типа. И в а н о в Л.Д. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 30 - 35.

Изучаются многомерные три-ткани, установлено существование три-тканей, полярно-сопряженных с четырехмерными три-тканями Боля гиперболического типа.

Библиография: 2 названия.

УДК 513.73

Об одном классе расслояемых пар конгруэнций кривых второго порядка в P_3. К о р с а к о в а Л.Г. "Дифференциальная геометрия многообразий фигур". Вып. 10, Калининград, 1979, с. 36-40. Рассматривается класс расслояемых пар $(C_1 C_2)$ конгруэнций