УДК 514.76

Г. А. Султанова
Пензенский государственный университет
sultgaliya@yandex.ru

Об оценке размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов касательных расслоений со связностью полного лифта над непроективно-евклидовой базой

В настоящей работе получены оценки сверху размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда связность в базовом пространстве является непроективно-евклидовой, а тензор кривизны связности удовлетворяет специальному условию.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, касательное расслоение, полный лифт линейной связности, вертикальный лифт векторных полей, полный лифт векторных полей, вертикально-векторное поднятие аффинора, горизонтально-векторное поднятие аффинора.

1. Предварительные сведения

Пусть M — дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности *n*; $T(M)$ — его касательное расслоение с канонической проекцией π;

$$A = \{a\varepsilon^0 + b\varepsilon^1 \mid a, b \in R,\ \varepsilon^0 = 1,\ (\varepsilon^1)^2 = 0\} \text{ —}$$

алгебра дуальных чисел со стандартным базисом $(\varepsilon^0, \varepsilon^1)$.

© Султанова Г. А., 2016

Если (x^i) — локальные координаты в некоторой окрестности $U \in M$, то в $\pi^{-1}(U) \in T(M)$ возникают естественные локальные координаты (x_0^i, x_1^i). Закон преобразования этих координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U), x_0^i, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V), \overline{x}_0^i, \overline{x}_1^i)$ имеет вид [3]

$$\overline{x}_0^i = \overline{x}_0^i(x_0^1, \ldots, x_0^n), \;\; \overline{x}_1^i = \left(\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} \right)_{(0)} x_1^k \, . \tag{1.1}$$

Введем понятия лифтов функций, векторных полей, полного лифта линейной связности ∇, тензорных полей типа (1,1) с базы в касательное расслоение.

Для функции $f : M \to R$ класса C^∞ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом, а функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ — полным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$ [3].

Пусть $X \in \Im_0^1(M)$. Векторные поля $X^{(1)} \in \Im_0^1(T(M))$ и $X^{(0)} \in \Im_0^1(T(M))$ называются вертикальным и полным лифтом векторного поля X соответственно, которые в локальных координатах определяются условиями

$$X^{(1)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^1 , \;\; X^{(0)} = (X^i)_{(0)} \partial_i^0 + (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j \partial_i^1 \, .$$

Если на многообразии M задана линейная связность ∇, то на $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, называемая полным лифтом связности ∇ и удовлетворяющая условию [6]

$$\nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}, \tag{1.2}$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M), a, b \in A$.

Пусть $G \in \Im_1^1(M)$. Векторное поле $\gamma G = (G_i^j)_{(0)} x_1^i \partial_j^1$ называется вертикально-векторным поднятием [1], а векторное поле $G^{H\gamma} = (G_i^j)_{(0)} x_1^i (\partial_j^0 - (\Gamma_{js}^p)_{(0)} x_1^s \partial_p^1)$ — горизонтально-векторным поднятием [2] аффинора G.

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования пространств $(T(M), \nabla^{(0)})$

Определение. *Векторное поле* $\widetilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$ *называется инфинитезимальным аффинным преобразованием, или автоморфизмом связности* $\nabla^{(0)}$*, если*

$$L_{\tilde{X}} \nabla^{(0)} = 0, \tag{2.1}$$

где $L_{\widetilde{X}}$ *— символ производной Ли вдоль векторного поля* $\widetilde{X} \in \Im_0^1(T(M))$.

Изучаемые линейные связности ∇ на базе M предполагаются не имеющими кручения, то есть для каждой связности ∇ тензорное поле кручения $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$ равно нулю. Инфинитезимальное аффинное преобразование $\widetilde{X}$ связности $\nabla^{(0)}$ в $T(M)$ имеет вид [8]

$$\tilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma}, \tag{2.2}$$

где X, Y — векторные поля; F, G — тензорные поля типа (1,1) на многообразии M, удовлетворяющие условиям

$$L_X \nabla = 0; \; L_Y \nabla = 0; \; \nabla G = 0; \; \nabla F = 0;$$

$$R_{jml}^i F_k^m = R_{jkl}^m F_m^i = 0, \; R_{jml}^i G_k^m - R_{jkl}^m G_m^i = 0.$$

Обозначим через $\widetilde{L}$ алгебру Ли векторных полей вида (2.2), а через L^{α} $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$ — подалгебры Ли векторных полей вида $X^{(0)}, Y^{(1)}, \gamma G$, $F^{H\gamma}$ соответственно. Тогда

$$\dim \widetilde{L} = \dim L^0 + \dim L^1 + \dim L^2 + \dim L^3,$$

причем размерности подалгебр L^0 и L^1 равны размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (M, ∇).

3. Оценка размерностей алгебр Ли инфинитезимальных автоморфизмов пространств $(T(M), \nabla^{(0)})$ над непроективно-евклидовой базой

Линейная связность, заданная на (M, ∇), $n > 2$, является непроективно-евклидовой, если тензорное поле Г. Вейля этой связности отлично от нулевого, что равносильно выполнению одного из следующих условий [5].

I. Существует карта гладкого атласа (U, φ) такая, что составляющая тензорного поля кривизны вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов.

II. В каждой карте (V, ψ) все составляющие тензорного поля кривизны $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ равны нулю для попарно различных индексов, но существует карта (U, φ) такая, что составляющая вида $R^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}$ отлична от нуля для попарно различных индексов.

В работе [7] исследованы алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов в касательных расслоениях со связностью полного лифта в случае, когда база расслоения удовлетворяет условию I. В данной работе мы будем рассматривать случай II.

Оценим размерности подалгебр L^0 и L^1. И.П. Егоровым показано [4], что размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований непроективно-евклидова пространства (M,∇), удовлетворяющего условию II, не более n^2-3n+8. Значит,

$$dimL^0+dimL^1\le 2n^2-6n+16.$$

Оценим размерность подалгебры L^2. Рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla G=0$, равносильного системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\partial_j G_k^i - G_p^i\Gamma_{kj}^p + G_k^p\Gamma_{pj}^i = 0,$$

где $G\in\Im_1^1(M)$.

Условия интегрируемости $G_k^m R_{mjl}^i - G_m^i R_{kjl}^m = 0$ этой системы дают соотношения вида $T\left({}^{i}_{kjl}\middle|{}^{h}_{i}\right)G_h^m=0$, где по определению

$$T\left({}^{i}_{kjl}\middle|{}^{h}_{m}\right)=\delta_k^h R_{mjl}^i-\delta_m^i R_{kjl}^h.$$

Рассмотрим матрицу D системы, составленную из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} j\\ 234\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ s34\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ s24\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ s32\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 232\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 224\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 332\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1\\ 343\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 443\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 424\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 243\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 432\end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1\\ 324\end{pmatrix}$$

при неизвестных

$$G_1^i, G_k^2, G_k^3, G_k^4, G_2^2, G_3^3, G_4^4, G_4^2, G_2^4, G_4^3, G_3^4, G_3^2, G_2^3 \quad (i>1,\, k>4)$$

в уравнениях $T\left({}^{i}_{kjl}\middle|{}^{h}_{i}\right)G_h^m=0$. Тогда матрица D приобретет вид

$$D=\begin{pmatrix}
a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & a & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & aI_{n-1} & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & aI_{n-4} & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bI_{n-4} & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -a-b & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (-a-b)I_{n-4}
\end{pmatrix},$$

где I_k — единичная матрица порядка k, $R^1_{243}=a, R^1_{432}=b$.

Ранг данной матрицы не менее $4n-4$. Значит, размерность пространства решений $\nabla G=0$ не более n^2-4n+4. Отсюда следует, что $dimL^2\le n^2-4n+4$.

Оценим размерность подалгебры L^3. Рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla F=0$, где $F\in\Im^1_1(M)$. Условия интегрируемости

$$F^m_j R^i_{mkl}=0,\, F^m_k R^i_{jml}=0,\, F^m_l R^i_{jkm}=0,\, F^i_m R^m_{jkl}=0$$

данного уравнения дают соотношения вида $K({}^i_{jkl}\big|{}^h_m)F^m_h=0$, где по определению

$$K({}^i_{jkl}\big|{}^h_m)=\delta^h_j R^i_{mkl},\, K({}^i_{jkl}\big|{}^h_m)=\delta^h_k R^i_{jml},\, K({}^i_{jkl}\big|{}^h_m)=\delta^i_m R^h_{jkl}.$$

Рассмотрим матрицу P системы при неизвестных $F^i_1, F^2_k\ (k>1), F^3_l\ (l>1), F^4_p\ \ (p>1)$, составленную из коэффициентов

$$\begin{pmatrix} s \\ 243 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s34 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2s4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ s32 \end{pmatrix}$$

в уравнениях $K\left(\begin{smallmatrix} i \\ jkl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ m \end{smallmatrix}\right)=0, K\left(\begin{smallmatrix} i \\ jkl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ m \end{smallmatrix}\right)=0, K\left(\begin{smallmatrix} i \\ jkl \end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix} h \\ m \end{smallmatrix}\right)=\delta^i_m R^h_{jkl}$. Матрица P приобретет следующий вид:

$$P=\begin{pmatrix} aI_n & * & * & * \\ 0 & -aI_{n-1} & * & * \\ 0 & 0 & -aI_{n-1} & * \\ 0 & 0 & 0 & (-a-b)I_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы не менее $4n-3$. Значит, размерность пространства решений $\nabla F=0$ не более n^2-4n+3. Следовательно, $dim L^3 \le n^2-4n+3$.

Таким образом, имеет место

Теорема. *Если в пространстве* (M,∇) *тензорное поле* R *имеет в некоторой координатной окрестности составляющую* $R^1_{234}\ne 0$*, то размерность алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований пространств* $(T(M),\nabla^{(0)})$ *не более, чем* $4n^2-14n+23$.

Список литературы

1. *Sato K.* Infinitesimal affine transformations of the tangent bundles with Sasaki metric // Tohoku Math. Jour. 1974. № 26. P. 353—361.

2. *Tanno S.* Infinitesimal isometries on the tangent bundles with complete lift metric // Tensor, N. S. 1974. Vol. 28. P. 139—144.

3. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. N. Y., 1973.

4. *Егоров И. П.* Движения в пространствах аффинной связности., М., 2009.

5. *Синюков Н. С.* Геодезические отображения римановых пространств. М., 1979.

6. *Султанов А. Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Матем. 1999. №9. С. 64—72.

7. *Султанов А. Я., Султанова Г. А.* Оценка размерностей алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения *T*(*M*) со связностью полного лифта // Учен. зап. Казан. гос. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки. 2014. Т. 156, кн. 2. С. 43—54.

8. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Тр. геом. семин. Казань, 1984. №16. С. 117—127.

G. Sultanova

The estimate of dimensions of Lie algebras for infinitesimal automorphisms in the tangent bundle with the complete lift connection with nonprojective Euclidean base

We obtain upper bounds of dimensions of Lie algebra for infinitesimal automorphisms in tangent bundles with a complete lift connection in the case when the connection is nonprojective-Euclidean, and the curvature tensor components of connection satisfy the special condition.

УДК 514.76

К.К. Хабазня
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Калининград
mmphj@mail.ru

Связности 1-го и 2-го порядков на центропроективных многообразиях

Работа посвящена центропроективным многообразиям, связностям на них и геометрическим объектам, описывающим эти связности. Определяется центропроективное многообразие W_n, даются его структурные уравнения, вводятся понятия голономного W_n^H, полуголономного W_n^S и неголономного W_n^N многообразий, а также главных расслоений центропроективных кореперов 1-го $C^1(W_n)$ и 2-го $C^2(W_n)$ порядков. Задаются фундаментально-групповые связности в этих рас-

© Хабазня К.К., 2016