УДК 511.3; 519.669

В. Л. Щербань

КАК ИЗ ТРЕУГОЛЬНИКА ПАСКАЛЯ ИЗВЛЕЧЬ ФОРМУЛЫ ДЛЯ НАХОЖДЕНИЯ ВСЕХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Представлены ранее неизвестные числовые свойства прямоугольного треугольника Паскаля и впервые даны основные результаты нахождения его вещественного дискриминанта. Обнаружены числовые свойства усеченного треугольника Паскаля для отыскивания всех простых чисел и представлены арифметические формулы для прямого нахождения всех простых чисел.

In the presented arithmetic study, the existence of an infinite set of numerical properties of a right-angled Pascal triangle is confirmed and the main results of finding its numerical discriminant are given. Exactly, the numerical properties of the truncated Pascal triangle for the direct finding of all primes are found.

Ключевые слова: треугольник Паскаля, числа Фибоначчи, простые числа, возвратные (рекуррентные) числовые последовательности.

Keywords: Pascal triangle, Fibonacci numbers, prime numbers, recurrent sequences.

Введение

Настоящее арифметическое исследование показало непосредственную связь чисел треугольника Паскаля с симметричными многочленами от *(n)*-переменных. В точности, найдено числовое решение всего усеченного треугольника Паскаля — это положения (7) и (11). Вслед за этим установлены арифметические формулы для прямого нахождения всех простых чисел — (5) и (14) [1].

1. Числовые таблицы как предмет рассмотрения

До работы с арифметическими таблицами необходимо обстоятельно ознакомиться с простейшими симметричными многочленами степенных сумм [2]. Для этого нужны следующие обозначенные многочлены:

$$A_q(x) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q) \tag{1}$$

$$A_q(x) = a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + a_3 x^{n-3} + \ldots + a_n \,,$$

$$A'_q(x) = ({}^1/_1) a_1 x^{n-1} + ({}^1/_2) a_2 x^{n-2} + ({}^1/_3) a_3 x^{n-3} + \ldots + ({}^1/_n) a_n \,,$$

$$A''_q(x) = ({}^1/_1) a_1 x^{n-1} + ({}^1/_3) a_2 x^{n-2} + ({}^1/_5) a_3 x^{n-3} + \ldots + ({}^1/_{2n-1}) a_n \,,$$

Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2020. № 2. С. 23 – 39.

$Dis(A_q)$ — числовой дискриминант многочлена $A_q(x)$,

$\mathrm{Re}\,s(A_q; A_{q-1})$ — числовой результант многочленов $A_q(x); A_{q-1}(x)$.

Решить арифметическое сравнение (1) — значит найти все значения неизвестного числа *(x)*, ему удовлетворяющие. Два сравнения (или более), которым удовлетворяют одни и те же значения *(x)*, называются равносильными, или эквивалентными.

Числовые последовательности, в которых каждый член определяется как некоторая функция предыдущих, называются возвратными, или рекуррентными [3]. Последовательное нахождение таких чисел определяется при помощи возвратного уравнения.

Представим известную числовую таблицу, которую называют треугольником Паскаля, в прямоугольной форме [4]. Суммы чисел, лежащих последовательно на фиксированных восходящих диагоналях, являются рядом Фибоначчи [5]. Ряды чисел, заполняющие последовательно отдельные вертикали треугольника Паскаля, называются многоугольными числами. Для нахождения многоугольных чисел служит таблица, в которой каждое число образуется посредством сложения двух чисел, стоящих перед и над ним (табл. 1).

Таблица 1

Многоугольные числа

1	1	1	1	1	1
2	3	4	5	6	7
3	6	10	15	21	28
4	10	20	35	56	84
5	15	35	70	126	210
6	21	56	126	252	462
7	28	84	210	462	924
8	36	120	330	792	1716
9	45	165	495	1287	....

2. Общий метод построения арифметических таблиц

Вертикальные возвратные (рекуррентные) числовые ряды, для которых осуществимо посредством правил вычислений (сложения, вычитания и числового сравнения) нахождение простейших свойств целых чисел, являются арифметическими таблицами. Основное числовое свойство таблиц размещается посредством действий (операций) над числами, лежащими на фиксированных горизонталях. В таких таблицах отсутствует операция деления чисел. Поэтому сравнимость чисел *(a)* и *(b)* по числовому модулю *(q)* означает только возможность представить *(a)* в виде $(a = b + qt)$, где число *(t)* целое.

Рассмотрим простейший пример создания арифметической таблицы.

Воспользуемся формулой Варинга [6] для получения степенной суммы от двух переменных через элементарные многочлены:

$$S_q = x_1^{\,q} + x_2^{\,q}\,;\;\; \sigma_1 = x_1 + x_2\,,\;\; \sigma_2 = x_1 x_2\,.$$

$$S_4 - \sigma_1^4 = -4\sigma_1^2\sigma_2 + 2\sigma_2^2\,,$$

$$S_5 - \sigma_1^5 = -5\sigma_1^3\sigma_2 + 5\sigma_1\sigma_2^2\,,$$

$$S_6 - \sigma_1^6 = -6\sigma_1^4\sigma_2 + 9\sigma_1^2\sigma_2^2 - 2\sigma_2^3\,,\;\ldots;$$

Правая часть последних уравнений позволяет образовать таблицу числовых коэффициентов в абсолютных величинах (табл. 2). После расшифровки последует установление ее главного арифметического свойства.

Таблица 2

Фрагмент коэффициентов степенной суммы от двух переменных

q	Y
4	4 + 2
5	5 + 5
6	6 + 9 + 2
7	7 + 14 + 7
8	8 + 20 + 16 + 2
9	9 + 27 + 30 + 9
10	10 + 35 + 50 + 25 + 2
11	11 + 44 + 77 + 55 + 11
12	12 + 54 + 112 + 105 + 36 + 2
13	13 + 65 + 156 + 182 + 91 + 13
14	14 + 77 + 210 + 294 + 196 + 49 + 2
15	15 + 90 + 275 + 450 + 378 + 140 + 15
16	… …

Примечание: метод дешифровки таблицы универсален для всех последующих таких таблиц.

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера *(q)*, надлежит кодировать следующим способом (табл. 2):

$$Y_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^{q-1} - 1)\,,$$

$$Y_q(x) = y_1 x^{n-1} + y_2 x^{n-2} + y_3 x^{n-3} + \ldots + y_n\,, \tag{2}$$

число *(q)* — обозначенный порядковый номер многочлена; число *(n)* — обозначенное количество чисел *(y)*, стоящих на фиксированных горизонталях.

Примеры:

$$Y_7(x) = 7x^2 + 14x + 7 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7)\,;$$

$$Y_{13}(x) = 13x^5 + 65x^4 + 156x^3 + 182x^2 + 91x + 13\,;$$

$$Y_{15}(x) = 15x^6 + 90x^5 + 275x^4 + 450x^3 + 378x^2 + 140x + 15\,.$$

Для всех нечетных чисел *(q)* многочлен (2) имеет только одно нетривиальное решение:

$$\operatorname{Re}s(Y_q;x+4)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{q-1}-1)\,. \qquad (3)$$

Примеры:

$$\operatorname{Re}s(Y_{13};x+4)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{12}-1)\,,\ \operatorname{Re}s(Y_{15};x+4)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{14}-1)\,,$$

$$\operatorname{Re}s(Y_{103};x+4)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{102}-1)\,,\ \operatorname{Re}s(Y_{105};x+4)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{104}-1)\,.$$

Осталось показать, как степенную сумму от двух переменных найти и извлечь из треугольника Паскаля при установленном условии

$$(\sigma_1^2+x\sigma_2)\equiv 0(\operatorname{mod}2^{q-1}-1)\,,$$

но с помощью формулы (4).

Расположим числа прямоугольного треугольника Паскаля иным образом. Все числа, лежащие на фиксированных восходящих диагоналях, разместим по отдельным горизонталям. В этом случае суммы чисел, лежащих последовательно на фиксированных горизонталях, окажутся числами Фибоначчи (табл. 3, *C*). Каждую отдельную горизонталь обозначим порядковым номером *(q)*. Определим теоретико-числовые свойства этой таблицы и производной от нее, числовой таблицы *(B)*.

Таблица 3

Основная таблица числовых сравнений

q	*B*	*C*
1	0	0
2	1	1
3	2	1
4	3 + 1	1 + 1
5	4 + 3	1 + 2
6	5 + 6 + 1	1 + 3 + 1
7	6 + 10 + 4	1 + 4 + 3
8	7 + 15 + 10 + 1	1 + 5 + 6 + 1
9	8 + 21 + 20 + 5	1 + 6 + 10 + 4
10	9 + 28 + 35 + 15 + 1	1 + 7 + 15 + 10 + 1
11	10 + 36 + 56 + 35 + 6	1 + 8 + 21 + 20 + 5
12	11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1	1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1
13	12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7	1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6
14	13 + 66 + 165 + 210 + 126 + 28 + 1	1 + 11 + 45 + 84 + 70 + 21 + 1
15	14 + 78 + 220 + 330 + 252 + 84 + 8	1 + 12 + 55 + 120 + 126 + 56 + 7
16	… … …	… … …

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера *(q)*, станем кодировать уже известным способом (табл. 3). В точности, таблица *(B)*:

$$B_q(x)\equiv 0(\operatorname{mod}q)\,,$$

$$B_q(x) = b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + b_3x^{n-3} + \ldots + b_n,$$

число *(q)* — обозначенный порядковый номер многочлена; число *(n)* — обозначенное количество чисел *(b)*, стоящих на фиксированных горизонталях.

Соответственно, таблица *(C)*:

$$C_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q),$$

$$C_q(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + \ldots + c_n; \ (c_1 = 1),$$

$$k = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n.$$

Число *(k)* является числом Фибоначчи.

Зафиксируем непосредственную связь между числовыми многочленами:

$$B_q(x) - B_{q-1}(x) = C_q(x),$$

$$2B_q(x) - B_{q-1}(x) = Y_q(x). \tag{4}$$

Отметим только простейшие числовые свойства таблиц *(B)* и *(C)*.

Система сравнений многочленов $B_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$; $C_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$ равносильна для всех простых чисел *(q)*. Доказательством этого утверждения является условие формул (3) и (4).

Соответствующие примеры:

$$B_7(x) = 6x^2 + 10x + 4 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7), x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7);$$

$$C_7(x) = x^2 + 4x + 3 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7), x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7).$$

Система сравнений

$$C_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q); C_{2q-1}(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q); B_{2q-1}(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Пример:

$$C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 91);$$

$$x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 7), \ x + 1 \equiv 0(\mathrm{mod}\, 13).$$

После этого необходимо обратить внимание на следующий многочлен:

$$C'_q(x) = ({}^1/{}_1)c_1x^{n-1} + ({}^1/{}_2)c_2x^{n-2} + ({}^1/{}_3)c_3x^{n-3} + \ldots + ({}^1/{}_n)c_n. \tag{5}$$

Этот многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда *(q)* — число простое, (табл. 3, *C*) или (табл. 6).

Статус данного арифметического положения — формула, служащая для нахождения всех простых чисел (то есть не способ для тестирования).

Также несложное числовое свойство алгоритма представленной формулы допускает ее компьютерную реализацию: $c_1 + c_2 + c_3 + ... + c_n = k$ – конкретное число Фибоначчи.

Примеры:

$$C_{11}(x) = 1x^4 + 8x^3 + 21x^2 + 20x + 5\,,$$

$$C'_{11}(x) = ({}^1/{}_1)x^4 + ({}^8/{}_2)x^3 + ({}^{21}/{}_3)x^2 + ({}^{20}/{}_4)x + ({}^5/{}_5)\,, =$$

$$= C'_{11}(x) = 1x^4 + 4x^3 + 7x^2 + 5x + 1\,.$$

$$C_{13}(x) = 1x^5 + 10x^4 + 36x^3 + 56x^2 + 35x + 6\,,$$

$$C'_{13}(x) = ({}^1/{}_1)x^5 + ({}^{10}/{}_2)x^4 + ({}^{36}/{}_3)x^3 + ({}^{56}/{}_4)x^2 + ({}^{35}/{}_5)x + ({}^6/{}_6) =$$

$$= C'_{13}(x) = 1x^5 + 5x^4 + 12x^3 + 14x^2 + 7x + 1\,.$$

Для краткого доказательства этого утверждения достаточно закрепить простые или составные числа в две очевидные формулы:

$$qC'_q(x) = Y_q(x)\,;\; Y_q(x) = \pm(2^{q-1} - 1)\,.$$

Затем подвергнуть анализу степенную сумму в качестве системы. Полное доказательство не приводится ввиду его громоздкости и фактической схожести с доказательством для следующего многочлена такого же типа: $F''_q(x)$ — (14).

3. Усеченный треугольник Паскаля и его дешифровка

Для нечетных чисел *(q)* разложим по формуле Варинга степенную сумму от трех переменных такого вида:

$$S_q = x_1{}^q + x_2{}^q + x_3{}^q \equiv 0(\mathrm{mod}\,\sigma_1)\,, \tag{6}$$

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3\,,\; \sigma_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3\,,\; \sigma_3 = x_1x_2x_3\,,$$

$$S_9 = ... - 9\sigma_2^3\sigma_3 + 3\sigma_3^3\,,$$

$$S_{11} = ... + 11\sigma_2^4\sigma_3 - 11\sigma_2\sigma_3^3\,,$$

$$S_{13} = ... - 13\sigma_2^5\sigma_3 + 13\sigma_2^2\sigma_3^3\,,$$

$$S_{15} = ... + 15\sigma_2^6\sigma_3 - 50\sigma_2^3\sigma_3^3 + 3\sigma_3^5\,.$$

Правая часть последних уравнений позволяет создать таблицу числовых коэффициентов в абсолютных величинах (табл. 4, *G*) и производную от нее таблицу *(U)*. После расшифровки установим основные их арифметические свойства.

Таблица 4

Фрагмент коэффициентов степенной суммы от трех переменных

q	U	G
9	24 + 3	9 + 3
11	35 + 14	11 + 11
13	48 + 40	13 + 26
15	63 + 90 + 3	15 + 50 + 3
17	80 + 175 + 20	17 + 85 + 17
19	99 + 308 + 77	19 + 133 + 57
21	120 + 504 + 224 + 3	21 + 196 + 147 + 3
23	143 + 780 + 546 + 26	23 + 276 + 322 + 23
25	168 + 1155 + 1176 + 126	25 + 375 + 630 + 100
27	195 + 1650 + 2310 + 450 + 3	27 + 495 + 1134 + 324 + 3
29	224 + 2288 + 4224 + 1320 + 32	29 + 638 + 1914 + 870 + 29
31	255 + 3094 + 7293 + 3366 + 187	31 + 806 + 3069 + 2046 + 155
33	....	....

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера *(q)*, надлежит кодировать следующим способом (табл. 4):

$$U_q(x) \equiv 0(\operatorname{mod} q)\,,\ G_q(x) \equiv 0(\operatorname{mod} 2^{q-1}-1)\,.$$

Примеры:

$$U_{15}(x) = 63x^2 + 90x + 3 \equiv 0(\operatorname{mod} 15)\,,$$

$$G_{15}(x) = 15x^2 + 50x + 3 \equiv 0(\operatorname{mod} 2^{14}-1)\,.$$

Перечислим только бесспорные (стало быть, которые невозможно опровергнуть) числовые свойства указанных таблиц:

$$\operatorname{Re}s(G_q; 4x-27) \equiv 0(\operatorname{mod} 2^{q-1}-1)\,. \qquad (7)$$

Примеры:

$$\operatorname{Re}s(G_{15}; 4x-27) \equiv 0(\operatorname{mod} 2^{14}-1)\,,$$

$$\operatorname{Re}s(G_{105}; 4x-27) \equiv 0(\operatorname{mod} 2^{104}-1)\,.$$

Система сравнений

$$U_q(x) \equiv 0(\operatorname{mod} q); U_{2q-1}(x) \equiv 0(\operatorname{mod} q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Система сравнений

$$U_q(x) \equiv 0(\operatorname{mod} q)\,;\ U_{q-2}(x) \equiv 0(\operatorname{mod} q)\,;\ Dis(U_q; U_{q-2}) \equiv 0(\operatorname{mod} q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Например [7]:

$$U_{17}(x)=80x^2+175x+20\equiv 0(\mathrm{mod}\,17\times 19),$$

$$Dis(U_{17})\equiv 0(\mathrm{mod}\,17\times 19),\ x\equiv 9(\mathrm{mod}\,17\times 19).$$

Далее, покажем, как степенную сумму (6) обнаружить и извлечь из треугольника Паскаля при установленном условии

$$(\sigma_2^3+x\sigma_3^2)\equiv 0(\mathrm{mod}\,2^{q-1}-1),$$

но с помощью формул (8).

Рассмотрим ряды чисел, заполняющие отдельные вертикали прямоугольного треугольника Паскаля (табл. 3, *C*). Только теперь повторно выстраивается подобный числовой треугольник, но в котором отсутствуют все вертикальные числовые ряды под четными номерами, а каждая последующая числовая вертикаль поднимается вверх на одну позицию предыдущей порядковой горизонтали. В полученном усеченном треугольнике *(F)* и производном от него треугольнике *(E)* каждая фиксированная горизонталь обозначена порядковыми нечетными номерами *(q)* (табл. 5). Из многих числовых свойств указанных таблиц выберем только несколько основных.

Предварительно зафиксируем два очевидных уравнения:

$$3E_q(x)-E_{q-2}(x)=G_q(x);\ E_q(x)-E_{q-2}(x)=F_q(x). \qquad (8)$$

Таблица 5

Усеченный треугольник Паскаля *(F)*

q	*E*	*F*
9	4 + 1	1 + 1
11	5 + 4	1 + 3
13	6 + 10	1 + 6
15	7 + 20 + 1	1 + 10 + 1
17	8 + 35 + 6	1 + 15 + 5
19	9 + 56 + 21	1 + 21 + 15
21	10 + 84 + 56 + 1	1 + 28 + 35 + 1
23	11 + 120 + 126 + 8	1 + 36 + 70 + 7
25	12 + 165 + 252 + 36	1 + 45 + 126 + 28
27	13 + 220 + 462 + 120 + 1	1 + 55 + 210 + 84 + 1
29	14 + 286 + 792 + 330 + 10	1 + 66 + 330 + 210 + 9
31	15 + 364 + 1287 + 792 + 55	1 + 78 + 495 + 462 + 45
33	16 + 455 + 2002 + 1716 + 220 + 1	1 + 91 + 715 + 924 + 165 + 1
35	17 + 560 + 3003 + 3432 + 715 + 12	1 + 105 + 1001 + 1716 + 495 + 11
37	18 + 680 + 4368 + 6435 + 2002 + 78	1 + 120 + 1365 + 3003 + 1287 + 66
39	....	....

Горизонтальные числа, исключая порядковые номера *(q)*, следует кодировать в том числе и способом обратных арифметических прогрессий (1).

Примеры:

$$E_{19}(x) = 9x^2 + 56x + 21 \equiv 0(\bmod 19);$$

$$E'_{19}(x) = ({}^{9}/_{1})x^2 + ({}^{56}/_{2})x + ({}^{21}/_{3}) \equiv 0(\bmod 19);$$

$$F_{21}(x) = 1x^3 + 28x^2 + 35x + 1 \equiv 0(\bmod 21);$$

$$F''_{21}(x) = ({}^{1}/_{1})x^3 + ({}^{28}/_{3})x^2 + ({}^{35}/_{5})x + ({}^{1}/_{7}) \equiv 0(\bmod 21).$$

Отметим только необходимые свойства таблиц *(E)* и *(F)* для чисел *($q>13$)* (табл. 5).

Система сравнений

$$E_q(x) \equiv 0(\bmod q); F_q(x) \equiv 0(\bmod q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Примеры:

$$E_{19}(x) \equiv 0(\bmod 19);\ F_{19}(x) \equiv 0(\bmod 19);$$

$$x \equiv 8,9(\bmod 19).$$

Система сравнений

$$E'_q(x) \equiv 0(\bmod q); F'_q(x) \equiv 0(\bmod q); Dis(E'_q; F'_q) \equiv 0(\bmod q)$$

равносильна только тогда, когда *(q)* — число простое.

Примеры:

$$E'_{19}(x) = ({}^{9}/_{1})x^2 + ({}^{56}/_{2})x + ({}^{21}/_{3}) \equiv 0(\bmod 19); x_1 = x_2 \equiv 9(\bmod 19);$$

$$F'_{19}(x) = ({}^{1}/_{1})x^2 + ({}^{21}/_{2})x + ({}^{15}/_{3}) \equiv 0(\bmod 19); x_1 = x_2 \equiv 9(\bmod 19);$$

$$Dis(E'_{19}) \equiv 0(\bmod 19); Dis(F'_{19}) \equiv 0(\bmod 19).$$

Система сравнений

$$E_q(x) \equiv 0(\bmod q); E_{2q-1}(x) \equiv 0(\bmod q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Примеры:

$$E_{17}(x) \equiv 0(\bmod 17),\ E_{33}(x) \equiv 0(\bmod 17),$$

$$x \equiv 94(\bmod 17^2).$$

Дальше будут рассмотрены только арифметические свойства треугольника *(F)*.

Если число *(q)* — составное, то при условии (7) и (11)

$$\operatorname{Re}s(F''_q; 4x - 27) \equiv 0(\bmod 2^{q-1} - 1). \qquad (9)$$

Если число *(q)* — простое, то лишь только $(a = 3^{n+1}q)$:

$$\operatorname{Re}s(aF''_q; 4x - 27) \equiv 0(\bmod 2^{q-1} - 1). \qquad (10)$$

Примеры:

$$F''_{33}(x)=({}^{1}/{}_{1})x^5+({}^{91}/{}_{3})x^4+({}^{715}/{}_{5})x^3+({}^{924}/{}_{7})x^2+({}^{165}/{}_{9})x+({}^{1}/{}_{11});$$

$$4x-27\equiv 0(\operatorname{mod} 2^{32}-1);$$

$$(459)F''_{17}(x)=({}^{1}/{}_{1})x^2+({}^{15}/{}_{3})x+({}^{5}/{}_{5})=1x^2+5x+1;$$

$$4x-27\equiv 0(\operatorname{mod} 2^{16}-1).$$

Для чисел *(*$q>13$*)* арифметическая система (6) и (8) эквивалентна при установленном условии:

$$(\sigma_2^3+x\sigma_3^2)\equiv 0(\operatorname{mod} q);\ qF''_q(x)=G_q(x). \tag{11}$$

Первый пример:

$$S_{33}(x)=\ldots\wedge 33x^5+1001x^4+4719x^3+4356x^2+615x+3\equiv 0(\operatorname{mod} 33)\to$$

$$\to({}^{1}/{}_{1})x^5+({}^{91}/{}_{3})x^4+({}^{715}/{}_{5})x^3+({}^{924}/{}_{7})x^2+({}^{165}/{}_{9})x+({}^{1}/{}_{11})=F''_{33}(x);$$

$$S_{33}=\ldots\wedge 33(F''_{33}).$$

Второй пример:

$$S_{37}(x)=\ldots\wedge{+37}(x^5+40x^4+273x^3+429x^2+143x+6)\equiv 0(\operatorname{mod} 37);\to$$

$$\to({}^{1}/{}_{37})S_{37}(x)=\ldots\wedge{+}(x^5+40x^4+273x^3+429x^2+143x+6);\to$$

$$\to({}^{1}/{}_{1})x^5+({}^{120}/{}_{3})x^4+({}^{1365}/{}_{5})x^3+({}^{3003}/{}_{7})x^2+({}^{1287}/{}_{9})x+({}^{66}/{}_{11})=F''_{37}(x);$$

$$({}^{1}/{}_{37})S_{37}\equiv\ldots\wedge F''_{37}.$$

Продолжение анализа числовых свойств треугольника *(F)*.

Если число *(q)* — простое, то сравнение $F_q(x)\equiv 0(\operatorname{mod} q)$ имеет столько решений, какова его степень.

Пример:

$$F_{23}(x)\equiv 0(\operatorname{mod} 23); x\equiv 2,14,17(\operatorname{mod} 23).$$

Система сравнений

$$F_q(x)\equiv 0(\operatorname{mod} q); F_{2q-1}(x)\equiv 0(\operatorname{mod} q)$$

равносильна для всех простых чисел *(q)*.

Примеры:

$$F_{17}(x)=x^2+15x+5\equiv 0(\operatorname{mod} 17); x+59\equiv 0(\operatorname{mod} 17^2),$$

$$F_{33}(x)=x^5+91x^4+715x^3+924x^2+165x+1\equiv 0(\operatorname{mod} 17).$$

Система сравнений

$$F_q(x)\equiv 0(\operatorname{mod} q); F'_q(x)\equiv 0(\operatorname{mod} q); Dis(F'_q)\equiv 0(\operatorname{mod} q) \tag{12}$$

равносильна только тогда, когда число *(q)* — простое.

Примеры:

$$F_{23}(x) = x^3 + 36x^2 + 70x + 7 \equiv 0(\bmod 23); x \equiv 2(\bmod 23);$$

$$F'_{23}(x) = ({}^1/{}_1)x^3 + ({}^{36}/{}_2)x^2 + ({}^{70}/{}_3)x + ({}^7/{}_4) \equiv 0(\bmod 23),$$

$$Dis(F'_{23}) \equiv 0(\bmod 23).$$

Далее, система сравнений

$$F_q(x) \equiv 0(\bmod h); F''_q(x) \equiv 0(\bmod h); Dis(F''_q) \equiv 0(\bmod h) \qquad (13)$$

равносильна только тогда, когда числа *(q)* и *(h)* — взаимно простые.

Примеры:

$$F_{19}(x) \equiv 0(\bmod 37); F''_{19}(x) \equiv 0(\bmod 37),$$

$$Dis(F''_{19}) = 37; x \equiv 15(\bmod 37).$$

Примечание. Числа Фибоначчи, первые изъяты в явной форме из треугольника Паскаля и поэтому считаются первой по счету числовой возвратной последовательностью. Воспроизведенные формулы Виета [8], по аналогии, предлагают второй по счету числовой ряд после чисел Фибоначчи, который имеет возвратное уравнение $(U'_q = U'_{q-1} + U'_{q-3})$.

Далее, следует третий по счету ряд чисел:

$$V'_q = 0,1,1,1,2,2,3,4,5,7,...; (V'_q = V'_{q-2} + V'_{q-3}).$$

Он распадается на два числовых ряда — по четным и нечетным порядковым номерам, имеющих равные возвратные уравнения (табл. 5):

$$(E_k) = 0,1,2,3,5,..., (E_k = E_{k-1} + E_{k-2} + E_{k-4}),$$

$$(F_k) = 0,1,1,1,2,..., (F_k = F_{k-1} + F_{k-2} + F_{k-4}),\ (F_k = E_k - E_{k-1}).$$

Проверочное числовое сравнение для простых чисел: $3(E_k) - E_{k-1} \equiv 0(\bmod q)$. Числа *($E_k$)* и *($F_k$)* — сумма чисел, лежащих на фиксированных горизонталях обозначенными номерами *(q)*. Пример:

$$F_{19} = 1 + 21 + 15 = 37.$$

После исследования многочлена (5) приступаем к изучению следующего многочлена:

$$F''_q(x) = ({}^1/{}_1)f_1x^{n-1} + ({}^1/{}_3)f_2x^{n-2} + ({}^1/{}_5)f_3x^{n-3} + ... + ({}^1/{}_{2n-1})f_n. \qquad (14)$$

Этот многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда *(q)* — число простое (табл. 5, *F* или табл. 7).

Примеры:

$$F_{23}(x) = 1x^3 + 36x^2 + 70x + 7;$$

$$F''_{23}(x) = ({}^1/{}_1)x^3 + ({}^{36}/{}_3)x^2 + ({}^{70}/{}_5)x + ({}^7/{}_7) = 1x^3 + 12x^2 + 14x + 1;$$

$$F_{29}(x) = 1x^4 + 66x^3 + 330x^2 + 210x + 9;$$

$$F''_{29}(x) = ({}^{1}/_{1})x^4 + ({}^{66}/_{3})x^3 + ({}^{330}/_{5})x^2 + ({}^{210}/_{7})x + ({}^{9}/_{9}) =$$

$$= F''_{29}(x) = 1x^4 + 22x^3 + 66x^2 + 30x + 1\,.$$

Решающим доказательством данного утверждения является положение (11), при котором система сравнений (9) и (10) неэквивалентна без установочного условия $(a = 3^{n+1}q)$. Или, в точности, многочлен $F''_q(x) \not\equiv \not\equiv 0(\operatorname{mod} q)$, если число *(q)* — простое (16). Подтвердим это следующим положением. Системы сравнений (12) и (13) неэквивалентны. Доказательство этого размещено в пятом разделе.

4. Нахождение всех простых чисел с помощью формул (5) и (14)

Таблицы Паскаля служат в том числе и для создания заранее определенного алгоритма арифметически-логического устройства (АЛУ), выполняющего арифметические и логические операции. Смотрим таблицу числовых сравнений (табл. 3, *C*). Эта таблица в полном формате на этом месте — таблица 6.

Выбирается первый необязательный порядковый многочлен:

$$C_q(x) = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + c_3x^{n-3} + \ldots + c_n\,,$$

число *(q)* является порядковым номером многочлена; число *(n)* равно количеству чисел $(c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_n)$, стоящих на фиксированных горизонталях. Например:

$$C_{17}(x) = 1x^7 + 14x^6 + 78x^5 + 220x^4 + 330x^3 + 252x^2 + 84x + 8\,.$$

Таблица 6

Треугольник Паскаля *(C)*

№ *q*	
6	1 + 3 + 1
7	1 + 4 + 3
8	1 + 5 + 6 + 1
9	1 + 6 + 10 + 4
10	1 + 7 + 15 + 10 + 1
11	1 + 8 + 21 + 20 + 5
12	1 + 9 + 28 + 35 + 15 + 1
13	1 + 10 + 36 + 56 + 35 + 6
14	1 + 11 + 45 + 84 +70 + 21 + 1
15	1 + 12 + 55 + 120 +126 + 56 + 7
16	1 + 13 + 66 + 165 + 210 + 126 + 28 + 1
17	1 + 14 + 78 + 220 + 330 + 252 + 84 + 8
18	1 + 15 + 91 + 286 + 495 + 462 + 210 + 36 + 1
19	1 + 16 + 105 + 364 + 715 + 792 + 462 +120 + 9
20	1 + 17 + 120 + 455 + 1001 + 1287 + 924 +330 + 45 + 1
21	1 + 18 + 136 + 560 + 1365 + 2002 + 1716 +792 + 165 + 10
22	1 + 19 + 153 + 680 + 1820 + 3003 + 3003 + 1716 + 495 +55 +1
23	1 + 20 + 171 + 816 + 2380 + 4368 + 5005 + 3432 + 1287 +220 + 11
24	… … … … …

Создается второй многочлен (5) — дискриминантный (табл. 6):

$$C'_q(x) = ({}^1/_1)c_1x^{n-1} + ({}^1/_2)c_2x^{n-2} + ({}^1/_3)c_3x^{n-3} + \ldots + ({}^1/_n)c_n .$$

Этот многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда *(q)* — число простое. Например:

$$C'_{17}(x) = ({}^1/_1)x^7 + ({}^{14}/_2)x^6 + ({}^{78}/_3)x^5 +$$

$$+ ({}^{220}/_4)x^4 + ({}^{330}/_5)x^3 + ({}^{252}/_6)x^2 + ({}^{84}/_7)x + ({}^8/_8) =$$

$$= 1x^7 + 7x^6 + 26x^5 + 55x^4 + 66x^3 + 42x^2 + 12x + 1 .$$

Далее, смотрим усеченный треугольник Паскаля (табл. 5, *F*). Эта таблица в полном формате на этом месте — таблица 7.

Выбирается первый необязательный порядковый многочлен:

$$F_q(x) = f_1x^{n-1} + f_2x^{n-2} + f_3x^{n-3} + \ldots + f_n ,$$

число *(q)* является порядковым номером многочлена; число *(n)* равно количеству чисел $(f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n)$, стоящих на фиксированных горизонталях.

Например:

$$F_{37}(x) = 1x^5 + 120x^4 + 1365x^3 + 3003x^2 + 1287x + 66 .$$

Таблица 7

Арифметический треугольник (*F*)

№ *q*	
15	1 + 10 + 1
17	1 + 15 + 5
19	1 + 21 + 15
21	1 + 28 + 35 + 1
23	1 + 36 + 70 + 7
25	1 + 45 + 126 + 28
27	1 + 55 + 210 + 84 + 1
29	1 + 66 + 330 + 210 + 9
31	1 + 78 + 495 + 462 + 45
33	1 + 91 + 715 + 924 + 165 + 1
35	1 + 105 + 1001 + 1716 + 495 + 11
37	1 + 120 + 1365 + 3003 + 1287 + 66
39	1 + 136 + 1820 + 5005 + 3003 + 286 + 1
41	1 + 153 + 2380 + 8008 + 6435 + 1001 + 13
43	1 + 171 + 3060 + 12376 + 12870 + 3003 + 91
45	1 + 190 + 3876 + 18564 + 24310 + 8008 + 455 + 1
47	1 + 210 + 4845 + 27132 + 43758 + 19448 + 1820 + 15
49	1 + 231 + 5985 + 38760 + 75582 + 43758 + 6188 + 120
51	1 + 253 + 7315 + 54264 + 125970 + 92378 + 18564 + 680 + 1
53	1 + 276 + 8855 + 74613 + 203490 + 184756 + 50388 + 3060 + 17
55	… … … …

Создается второй многочлен (14) — дискриминантный (табл. 7):

$$F''_q(x) = (^1/_1) f_1 x^{n-1} + (^1/_3) f_2 x^{n-2} + (^1/_5) f_3 x^{n-3} + \ldots + (^1/_{2n-1}) f_n \,.$$

Этот многочлен имеет все целые числовые коэффициенты только тогда, когда *(q)* – число простое. Например:

$$F''_{37}(x) = (^1/_1)x^5 + (^{120}/_3)x^4 + (^{1365}/_5)x^3 + (^{3003}/_7)x^2 + (^{1287}/_9)x + (^{66}/_{11}) =$$

$$= 1x^5 + 40x^4 + 273x^3 + 429x^2 + 143x + 6 \,.$$

Этот результат является следствием доказанного утверждения: $F''_q(x) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$, если *(q)* — простое число (13), (16). Это положение по-другому подтверждается и так. Арифметический треугольник *(F)* допускает только два нетривиальных решения — (9), (10).

5. Как доказываются числовые свойства арифметических треугольников

Предлагается степенная сумма (6), которая разлагается по формуле Варинга на элементарные многочлены и образует систему с возвратным уравнением (в общем виде — числовым сравнением):

$$({\sigma_2}^3 + x{\sigma_3}^2) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q) \,. \qquad (15)$$

С помощью биномиальных коэффициентов Ньютона и многоугольных чисел треугольника Паскаля (табл. 1) устанавливаются очевидные уравнения и сравнения (табл. 5):

$$E_q(x) - E_{q-2}(x) = F_q(x) \,,$$

$$3E_q(x) - E_{q-2}(x) = G_q(x) \leftarrow \ldots \wedge S_q \,,$$

$$(4{\sigma_2}^3 + 27{\sigma_3}^2) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^{q-1} - 1) \,.$$

Вслед за этим раскрываем сущность специально предназначенного метода *от противного*, при котором «доказывание» некоторого свойства треугольника Паскаля — суждения (тезиса доказательства) — осуществляется через опровержение отрицания этого суждения — антитезиса. Этот способ доказательства основывается на истинности закона двойного отрицания в классической логике.

Например, подробно исследуем следующее положение. Предположим, что для какого-то многочлена (9) или (14) имеется конкретное числовое сравнение: $F''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$, где число *(q)* — простое. Вследствие этого системы сравнений (12) и (13) станут эквивалентными. Или, в точности (1):

$$F_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q) \,,$$

$$F'_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q); Dis(F'_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q) \,,$$

$$F''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q); Dis(F''_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q) \,.$$

В этом случае после несложных вычислений извлекается утверждение $Dis(F_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)$, которое, однако, невозможно.

В самом деле, тогда будут иметь место последующие арифметические действия:

$$E_q(x) - E_{q-2}(x) = F_q(x)\,,\ -\ Dis(F_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,;$$

$$3E_q(x) - E_{q-2}(x) = \ldots\,^\wedge S_q(x)\,,\ (15)\ -\ Dis(^\wedge S_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,;$$

$$Dis(E_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,.$$

Вследствие чего станут втройне равносильны все последующие системы сравнений:

$$E'_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,,\ E''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,,\ Dis(E'_q\,; E''_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,;$$

$$E'''_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,,\ \overline{E}_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,,\ Dis(E'''_q; \overline{E}_q) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,.$$

Чего быть не может, так как это противоречит всем заявленным условиям, в том числе и установкам (15) и (17). Следовательно, если число *(q)* — простое, тогда многочлен

$$F''_q(x) \not\equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,. \tag{16}$$

Таким образом, главное арифметическое свойство треугольника *(F)* для нахождения всех простых чисел доказано (табл. 7).

Разъяснение:

$$E'''_q(x) = ({}^1/_1)a_1x^{n-1} + ({}^1/_4)a_2x^{n-2} + ({}^1/_7)a_3x^{n-3} + \ldots + ({}^1/_{3n-2})a_n\,,$$

$\overline{E}_q(x)$ — каждый многочлен выше обозначенного типа:

$$\overline{E}_q(x) = ({}^1/_1)a_1x^{n-1} + ({}^1/_k)a_2x^{n-2} + ({}^1/_{k+(k-1)})a_3x^{n-3} + \ldots + ({}^1/_{(k-1)n-(k-2)})a_n\ \ldots;$$

(k) – второй числовой элемент обратной арифметической прогрессии, в которой каждый следующий элемент равен предыдущему, увеличенному на фиксированное для прогрессии число (k – 1) [9; 10].

Вновь предположим, что для какого-то многочлена (12) имеется конкретное числовое сравнение

$$F'_q(x) \equiv 0(\mathrm{mod}\, q)\,,$$

число *(q)* является составным. Тогда системы сравнений (12) и (13) снова станут равносильными, что опровергнуто доказательством выше. Стало быть, системы сравнений (12) и (13) неэквивалентные.

Осталось отметить, что возвратное арифметическое сравнение степенной суммы от двух переменных

$$(\sigma_1^2 + x\sigma_2) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^{q-1} - 1)$$

и степенной суммы от трех переменных

$$(\sigma_2^3 + x\sigma_3^2) \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^{q-1} - 1) \tag{17}$$

имеет особый статус. Они взяты в зашифрованном виде из таблиц 2, 4, поэтому бесспорны по определению.

Примечание. Заметим, что положение (6) легко конвертируется в другое доказанное утверждение:

$$x^n + y^n - z^n \equiv 0(\mathrm{mod}\, 2^{l-1} - 1) \equiv 0(\mathrm{mod}\, l^2)\,.$$

При этом показатели $(n = l)$ должны удовлетворять неким условиям [11].

Заключение

Краткое арифметическое определение дискриминанта кубического трехчлена известно – два вещественных корня такого многочлена равны (сравнимы). Отмечаем, что в математике *понятие* отображается как определенный класс объектов, явлений или взаимоотношений между ними. Тогда понятие дискриминанта степенной суммы от трех переменных до сих пор неизвестно [12; 13]. Отчего впервые были предоставлены только числовые выкладки их конкретного измерения. Следом за этим укажем, что раз полученные арифметические треугольники оказались усеченными, то и порядковые числа, например ($q > 13$), рассматривались для нахождения соответствующих числовых дискриминантов [14].

Таблицы степенных сумм от четырех переменных составляются следующим образом: все вертикальные числовые ряды последовательно делятся на три части и группируются (табл. 3). В первую группу входят первый, четвертый, седьмой и далее по счету вертикальные ряды чисел. Во вторую группу входят второй, пятый, восьмой и далее по счету вертикальные ряды чисел. В третью группу входят третий, шестой, девятый и далее по счету вертикальные ряды чисел. Для составления одной сводной таблицы каждая последующая числовая вертикаль поднимается вверх на две позиции предыдущей порядковой горизонтали [15].

Список литературы

1. *Воронин С.М.* Простые числа. М., 1978.
2. *Прасолов В.В.* Многочлены. М., 2001. С. 20—22.
3. *Маркушевич А.И.* Возвратные последовательности. М., 1983.
4. *Успенский В.А.* Треугольник Паскаля. М., 1979.
5. *Воробьев Н.Н.* Числа Фибоначчи. М., 1992.
6. *Болтянский В.Г., Виленкин Н. Я.* Симметрия в алгебре. М., 2002. С. 53—55.
7. *Батхин А.Б.* Вычисление обобщенного дискриминанта вещественного многочлена // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. М., 2017. №88.
8. *Винберг Э.Б.* Алгебра многочленов. М., 1980.

9. *Бронштейн И.Н., Семендяев К.А.* Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. М., 1986.

10. *Арифметическая*, геометрическая прогрессии // Конспект лекций по высшей математике Керченского государственного технологического университета. URL: https://studfile.net/ preview/5125442/page:11/ (дата обращения: 10.10.2019).

11. *Постников М.М.* Введение в теорию алгебраических чисел. М., 1982. С. 20—21.

12. *Александрова П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я.* Энциклопедия элементарной математики. М. ; Л., 1951.

13. *Математическая* энциклопедия. М., 1977—1985. URL: https://rus-math.slovaronline.com/ (дата обращения: 10.10.2019).

14. *Дискриминант* многочлена // Онлайн-калькулятор Math. URL: https://math.semestr.ru/math/discriminant.php (дата обращения: 10.10.2019).

15. *Комбинаторика:* основные правила // Сила знаний : [сайт]. URL: http://ya-znau.ru/znaniya/zn/80 (дата обращения: 10.10.2019).

Об авторе

Виктор Леонидович Щербань — специалист, зав. учебной частью АНО «Центр дополнительного математического образования», Россия.

E-mail: sherba-q@ya.ru

The author

Viktor L. Scherban, Expert, Autonomous Non-Profit Organization «Center for Additional Mathematical Education», Russia.

E-mail: sherba-q@ya.ru