УДК 514.75

О. О. Белова
Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2022-53-3

Обобщенная билинейная связность на пространстве центрированных плоскостей

Продолжается исследование пространства Π центрированных плоскостей в проективном пространстве P_n. В обобщенном расслоении задана билинейная связность, ассоциированная с пространством Π. Объект обобщенной билинейной связности, ассоциированный с пространством центрированных плоскостей, содержит два простейших подтензора и подквазитензоры (четыре простейших и три простых). Поле объекта этой связности определяет объекты кручения, кривизны-кручения и кривизны, последние два из которых являются тензорами. Тензор кривизны содержит шесть простейших и четыре простых подтензора, а тензор кривизны-кручения — три простейших и два простых подтензора.

Рассмотрен канонический случай обобщенной билинейной связности.

Ключевые слова: проективное пространство, пространство центрированных плоскостей, обобщенная билинейная связность, кручение, кривизна

В настоящей работе используются метод внешних форм Э. Картана [1; 16] и теоретико-групповой метод Г. Ф. Лаптева [7; 9; 13; 15] для исследования пространства центрированных плоскостей одной размерности [10].

Поступила в редакцию 28.12.2021 г.

Данные методы успешно применяются в физике [12].

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_i\}$ ($i, ... = 1, ..., n$), инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^i A_i\,,\ dA_i = \theta A_i + \omega_i^j A_j + \omega_i A\,, \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω^i, ω_i, ω_j^i удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы $GP(n)$:

$$\begin{gathered} D\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,\ D\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j, \\ D\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \delta_j^i \omega_k \wedge \omega^k + \omega_j \wedge \omega^i. \end{gathered} \tag{2}$$

В пространстве P_n рассмотрим пространство Π центрированных плоскостей размерности m.

Помещаем вершину A в центр m-мерной плоскости, а вершины A_a на плоскость. Здесь и в дальнейшем индексы принимают значения $a, b, ... = 1, ..., m$; $\alpha, \beta, ... = m+1, ..., n$. Центрированную плоскость будем обозначать P_m^*.

Из формул (1) очевидны уравнения стационарности плоскости P_m^*:

$$\omega^a = 0\,,\ \omega^\alpha = 0\,,\ \omega_a^\alpha = 0\,,$$

поэтому формы ω^a, ω^α, ω_a^α являются главными. Выбираем эти формы в качестве независимых.

Определение. Гладкое многообразие со структурными уравнениями

$$D\omega^a = \omega^b \wedge \omega_b^a + \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha^a\,,$$

$$D\omega^\alpha = \omega^\beta \wedge \omega_\beta^\alpha + \omega^a \wedge \omega_a^\alpha\,,$$

$$D\omega_a^\alpha = \omega_b^\beta \wedge \left(\delta_a^b \omega_\beta^\alpha - \delta_\beta^\alpha \omega_a^b\right) - \omega^\alpha \wedge \omega_a\,,$$

$$D\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a - \omega^c \wedge \left(\delta_c^a \omega_b + \delta_b^a \omega_c\right) - \delta_b^a \omega^\alpha \wedge \omega_\alpha + \omega_b^\alpha \wedge \omega_\alpha^a ,$$

$$D\omega_\beta^\alpha = \omega_\beta^\gamma \wedge \omega_\gamma^\alpha + \omega_\beta^a \wedge \omega_a^\alpha + \delta_\beta^\alpha \omega_a \wedge \omega^a + \left(\delta_\beta^\alpha \omega_\gamma + \delta_\gamma^\alpha \omega_\beta\right) \wedge \omega^\gamma$$

назовем обобщенным расслоением билинейных реперов и обозначим $A_{n^2-2k+[k]}$, где $k = m(n-m)$ (ср. [5; 8]).

Замечание. Символ k заключен в квадратные скобки, так как k форм ω_a^α являются и базисными, и слоевыми. Будем их называть базисно-слоевыми формами (см.: [8]).

В обобщенном расслоении $A_{n^2-2k+[k]}$ зададим билинейную связность [5] способом Лаптева — Лумисте [4; 7] с помощью форм плоскостной $\tilde{\omega}_b^a$ и нормальной $\tilde{\omega}_\beta^\alpha$ линейных связностей и форм $\tilde{\omega}_a^\alpha$:

$$\tilde{\omega}_a^\alpha = \omega_a^\alpha - G_{a\beta}^\alpha \omega^\beta - G_{ab}^\alpha \omega^b - G_{a\beta}^{\alpha b} \omega_b^\beta ,$$

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - \Gamma_{bc}^a \omega^c - \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c^\alpha , \qquad (3)$$

$$\tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - \Gamma_{\beta a}^\alpha \omega^a - \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha a} \omega_a^\gamma .$$

Вычисляем внешние дифференциалы форм (3), используя структурные уравнения (2) и применяем теорему Картана — Лаптева в обобщенном случае, тогда

$$\Delta G_{a\beta}^\alpha - G_{ab}^\alpha \omega_\beta^b + (G_{a\beta}^{\alpha b} - \delta_\beta^\alpha \delta_a^b)\omega_b = G_{a\beta,\gamma}^\alpha \omega^\gamma + G_{a\beta,b}^\alpha \omega^b + G_{a\beta,\gamma}^{\alpha,b} \omega_b^\gamma ,$$

$$\Delta G_{ab}^\alpha = G_{ab,\beta}^\alpha \omega^\beta + G_{ab,c}^\alpha \omega^c + G_{ab,\beta}^{\alpha,c} \omega_c^\beta ,$$

$$\Delta G_{a\beta}^{\alpha b} = G_{a\beta,\gamma}^{\alpha b} \omega^\gamma + G_{a\beta,c}^{\alpha b} \omega^c + G_{a\beta,\gamma}^{\alpha b,c} \omega_c^\gamma , \qquad (4)$$

$$\Delta \Gamma_{bc}^a - \delta_b^a \omega_c - \delta_c^a \omega_b = \Gamma_{bc,\alpha}^a \omega^\alpha + \Gamma_{bc,e}^a \omega^e + \Gamma_{bc,\alpha}^{a,e} \omega_e^\alpha ,$$

$$\Delta \Gamma_{b\alpha}^a - \Gamma_{bc}^a \omega_\alpha^c + \Gamma_{b\alpha}^{ac} \omega_c - \delta_b^a \omega_\alpha = \Gamma_{b\alpha,\beta}^a \omega^\beta + \Gamma_{b\alpha,c}^a \omega^c + \Gamma_{b\alpha,\beta}^{a,c} \omega_c^\beta ,$$

$$\Delta\Gamma^{ac}_{b\alpha}+\delta^c_b\omega^a_\alpha=\Gamma^{ac}_{b\alpha,\beta}\omega^\beta+\Gamma^{ac}_{b\alpha,e}\omega^e+\Gamma^{ac,e}_{b\alpha,\beta}\omega^\beta_e\,,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta a}-\delta^\alpha_\beta\omega_a=\Gamma^{\alpha}_{\beta a,\gamma}\omega^\gamma+\Gamma^{\alpha}_{\beta a,b}\omega^b+\Gamma^{\alpha,b}_{\beta a,\gamma}\omega^\gamma_b\,,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}-\Gamma^{\alpha}_{\beta a}\omega^a_\gamma+\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega_a-\delta^\alpha_\beta\omega_\gamma-\delta^\alpha_\gamma\omega_\beta=$$

$$=\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu+\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,a}\omega^a+\Gamma^{\alpha,a}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu_a\,,$$

$$\Delta\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}-\delta^\alpha_\gamma\omega^a_\beta=\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu+\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,b}\omega^b+\Gamma^{\alpha a,b}_{\beta\gamma,\mu}\omega^\mu_b\,,$$

где в правых частях при базисных формах стоят пфаффовы производные, а оператор Δ действует по закону (см., напр., [14])

$$\Delta G^\alpha_{a\beta}=dG^\alpha_{a\beta}+G^\gamma_{a\beta}\omega^\alpha_\gamma-G^\alpha_{b\beta}\omega^b_a-G^\alpha_{a\gamma}\omega^\gamma_\beta\,.$$

Утверждение. *Объект обобщенной билинейной связности* $\overset{B}{\Gamma}=\{G^\alpha_{a\beta},G^\alpha_{ab},G^{\alpha b}_{a\beta},\Gamma^a_{b\alpha},\ \Gamma^a_{bc},\Gamma^{ac}_{b\alpha},\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\Gamma^\alpha_{\beta a},\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$, *ассоциированной с пространством центрированных плоскостей, содержит два простейших [6] подтензора* $G^\alpha_{ab},G^{\alpha b}_{a\beta}$ *простого [6] подквазитензора связности* $\{G^\alpha_{a\beta},G^\alpha_{ab},G^{\alpha b}_{a\beta}\}$, *четыре простейших подквазитензора* Γ^a_{bc}, $\Gamma^{ac}_{b\alpha}$, $\Gamma^\alpha_{\beta a}$, $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$, *а также два простых подквазитензора* $\{\Gamma^a_{bc},\Gamma^a_{b\alpha},\Gamma^{ac}_{b\alpha}\}$ *и* $\{\Gamma^\alpha_{\beta a},\Gamma^\alpha_{\beta\gamma},\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$.

Находим внешние дифференциалы базисных форм ω^a, ω^α с учетом выражений (3):

$$D\omega^\alpha=\omega^a\wedge\tilde\omega^\alpha_a+\omega^\beta\wedge\tilde\omega^\alpha_\beta+S^\alpha_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma+S^\alpha_{\beta a}\omega^\beta\wedge\omega^a+$$

$$+S^{\alpha a}_{\beta\gamma}\omega^\beta\wedge\omega^\gamma_a+S^\alpha_{ab}\omega^a\wedge\omega^b+S^{\alpha b}_{a\beta}\omega^a\wedge\omega^\beta_b\,,$$

$$D\omega^a=\omega^b\wedge\tilde\omega^a_b+\omega^\alpha\wedge\omega^a_\alpha+S^a_{b\alpha}\omega^b\wedge\omega^\alpha+S^a_{bc}\omega^b\wedge\omega^c+$$

$$+S^{ac}_{b\alpha}\omega^b\wedge\omega^\alpha_c\,,$$

где компоненты кручения S находятся по формулам

$$S^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]},\ S^{\alpha}_{\beta a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta a} - G^{\alpha}_{a\beta},\ S^{\alpha a}_{\beta\gamma} = \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma},\ S^{\alpha}_{ab} = G^{\alpha}_{[ab]},$$

$$S^{\alpha b}_{a\beta} = G^{\alpha b}_{a\beta},\ S^{a}_{b\alpha} = \Gamma^{a}_{b\alpha},\ S^{a}_{bc} = \Gamma^{a}_{[bc]},\ S^{ac}_{b\alpha} = \Gamma^{ac}_{b\alpha}.$$

Здесь и далее квадратные скобки означают альтернирование по крайним индексам или парам индексов, например

$$\Gamma^{\alpha}_{[\beta\gamma]} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}\right),\ G^{\alpha}_{a}{}^{[b,c}_{[\beta,\gamma]} = \frac{1}{2}\left(G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha c,b}_{a\gamma,\beta}\right).$$

Компоненты объекта кручения S удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм

$$\Delta S^{\alpha}_{\beta\gamma} + S^{\alpha a}_{[\beta\gamma]}\omega_a - \Gamma^{\alpha}_{[\beta a}\omega^{a}_{\gamma]} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{\beta a} - S^{\alpha b}_{a\beta}\omega_b + G^{\alpha}_{ab}\omega^{b}_{\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{\alpha a}_{\beta\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\omega^{a}_{\beta} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha}_{ab} \equiv 0,\ \Delta S^{\alpha b}_{a\beta} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{a}_{b\alpha} + S^{ac}_{b\alpha}\omega_c - \Gamma^{a}_{bc}\omega^{c}_{\alpha} - \delta^{a}_{b}\omega_{\alpha} \equiv 0,\ \Delta S^{a}_{bc} \equiv 0,$$

$$\Delta S^{ac}_{b\alpha} + \delta^{c}_{b}\omega^{a}_{\alpha} \equiv 0.$$

Утверждение. *Объект кручения S является геометрическим объектом (квазитензором) лишь в совокупности с объектом билинейной связности $\overset{B}{\Gamma}$.*

Учитывая дифференциальные уравнения (4) в структурных уравнениях форм связности (3), получим

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{a} = \tilde{\omega}^{b}_{a} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{b} + \tilde{\omega}^{\beta}_{a} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} + T^{\alpha}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + T^{\alpha}_{a\beta b}\omega^{\beta} \wedge \omega^{b} +$$

$$+ T^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + T^{\alpha}_{abc}\omega^{b} \wedge \omega^{c} + T^{\alpha c}_{ab\beta}\omega^{b} \wedge \omega^{\beta}_{c} + T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}\omega^{\beta}_{b} \wedge \omega^{\gamma}_{c},$$

$$D\tilde{\omega}^{a}_{b} = \tilde{\omega}^{c}_{b} \wedge \tilde{\omega}^{a}_{c} + R^{a}_{b\beta\gamma}\omega^{\beta} \wedge \omega^{\gamma} + R^{a}_{bc\alpha}\omega^{c} \wedge \omega^{\alpha} +$$

$$+ R^{ac}_{b\alpha\beta}\omega^{\alpha} \wedge \omega^{\beta}_{c} + R^{a}_{bce}\omega^{c} \wedge \omega^{e} + R^{ae}_{bc\alpha}\omega^{c} \wedge \omega^{\alpha}_{e} + R^{\alpha ce}_{b\alpha\beta}\omega^{\alpha}_{c} \wedge \omega^{\beta}_{e},$$

$$D\tilde{\omega}^{\alpha}_{\beta} = \tilde{\omega}^{\gamma}_{\beta} \wedge \tilde{\omega}^{\alpha}_{\gamma} + R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu} + R^{\alpha}_{\beta\gamma a}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{a} +$$

$$+ R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma} \wedge \omega^{\mu}_{a} + R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{a} \wedge \omega^{b} + R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega^{a} \wedge \omega^{\gamma}_{b} + R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}\omega^{\gamma}_{a} \wedge \omega^{\mu}_{b},$$

причем компоненты кривизны-кручения T имеют вид

$$T^{\alpha}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} - \Gamma^{b}_{a[\beta} G^{\alpha}_{b\gamma]} - G^{\mu}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]},$$

$$T^{\alpha}_{a\beta b} = 2\left(G^{\alpha}_{a[\beta,b]} - \Gamma^{c}_{a[\beta} G^{\alpha}_{cb]} - G^{\gamma}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma b]}\right),$$

$$T^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} - \Gamma^{c}_{a\beta} G^{\alpha b}_{c\gamma} + \Gamma^{cb}_{a\gamma} G^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\alpha}_{\gamma} \Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} -$$

$$- G^{\mu}_{a\beta} \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} + G^{\mu b}_{a\gamma} \Gamma^{\alpha}_{\mu\beta},$$

$$T^{\alpha}_{abc} = G^{\alpha}_{a[b,c]} - \Gamma^{e}_{a[b} G^{\alpha}_{ec]} - G^{\beta}_{a[b} \Gamma^{\alpha}_{\beta c]}, \qquad (5)$$

$$T^{\alpha c}_{ab\beta} = 2G^{\alpha,c}_{a[b,\beta]} + \Gamma^{ec}_{a\beta} G^{\alpha}_{eb} - \Gamma^{e}_{ab} G^{\alpha c}_{e\beta} + G^{\gamma c}_{a\beta} \Gamma^{\alpha}_{\gamma b} - G^{\gamma}_{ab} \Gamma^{\alpha c}_{\gamma\beta} +$$

$$+\delta^{\alpha}_{\beta} \Gamma^{c}_{ab} - \delta^{c}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\beta b} - \delta^{c}_{b} G^{\alpha}_{a\beta},$$

$$T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = G^{\alpha\,[b,c]}_{a\,[\beta,\gamma]} - \Gamma^{e[b}_{a[\beta} G^{\alpha c]}_{e\gamma]} - G^{\mu[b}_{a[\beta} \Gamma^{\alpha c]}_{\mu\gamma]} - \delta^{\alpha}_{|\underline{\beta}} \Gamma^{|\bar{b}c]}_{a\gamma]} + \delta^{|\bar{b}}_{a} \Gamma^{\alpha c]}_{|\underline{\beta}\gamma]}.$$

Компоненты объекта кривизны R

$$R^{a}_{bce} = \Gamma^{a}_{b[c,e]} - \Gamma^{d}_{b[c} \Gamma^{a}_{de]},$$

$$R^{a}_{bc\alpha} = \Gamma^{a}_{bc,\alpha} - \Gamma^{a}_{b\alpha,c} + \Gamma^{e}_{b\alpha} \Gamma^{a}_{ec} - \Gamma^{e}_{bc} \Gamma^{a}_{e\alpha},$$

$$R^{ad}_{bc\alpha} = \Gamma^{a,d}_{bc,\alpha} - \Gamma^{ad}_{b\alpha,c} + \Gamma^{ed}_{b\alpha} \Gamma^{a}_{ec} - \Gamma^{e}_{bc} \Gamma^{ad}_{e\alpha} - \delta^{d}_{c} \Gamma^{a}_{b\alpha},$$

$$R^{a}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{a}_{b[\alpha,\beta]} - \Gamma^{c}_{b[\alpha} \Gamma^{a}_{c\beta]},$$

$$R^{ac}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{c,b}_{b\alpha,\beta} - \Gamma^{ac}_{b\beta,\alpha} + \Gamma^{dc}_{b\beta} \Gamma^{a}_{d\alpha} - \Gamma^{d}_{b\alpha} \Gamma^{ac}_{d\beta},$$

$$R^{acd}_{b\alpha\beta} = \Gamma^{a\,[c,d]}_{b\,[\alpha,\beta]} - \Gamma^{e[c}_{b[\alpha} \Gamma^{ad]}_{e\beta]},$$

$$R^{\alpha}_{\beta ab} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[a,b]} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma[a} \Gamma^{\gamma}_{\beta b]},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma a} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,a} - \Gamma^{\alpha}_{\beta a,\gamma} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma} \Gamma^{\mu}_{\beta a} - \Gamma^{\alpha}_{\mu a} \Gamma^{\mu}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} = \Gamma^{\alpha,b}_{\beta a,\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\beta\gamma,a} + \Gamma^{\alpha}_{\mu a} \Gamma^{\mu b}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} \Gamma^{\mu}_{\beta a} - \delta^{b}_{a} \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta[\gamma,\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta[\gamma}\Gamma^{\eta}_{\beta\mu]},$$

$$R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha,a}_{\beta[\gamma,\mu]} - \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma,\mu} + \Gamma^{\alpha}_{\eta\gamma}\Gamma^{\eta a}_{\beta\mu} - \Gamma^{\alpha a}_{\eta\mu}\Gamma^{\eta}_{\beta\gamma},$$

$$R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} = \Gamma^{\alpha}_{\beta}{}^{[a,b}_{[\gamma,\mu]} + \Gamma^{\alpha}_{\eta}{}^{[a}_{[\gamma}\Gamma^{\eta b]}_{\beta\mu]}$$

удовлетворяют дифференциальным сравнениям (см. [2; 3; 11])

$$\Delta R^{a}_{bce} \equiv 0, \quad \Delta R^{a}_{bc\alpha} - 2R^{a}_{bcd}\omega^{d}_{\alpha} + R^{ad}_{bc\alpha}\omega_{d} \equiv 0, \quad \Delta R^{ad}_{bc\alpha} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{a}_{b\alpha\beta} + R^{a}_{bc[\alpha}\omega^{c}_{\beta]} + R^{ac}_{b[\alpha\beta]}\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{ac}_{b\alpha\beta} - 2R^{acd}_{b\alpha\beta}\omega_{d} - R^{ac}_{bd\beta}\omega^{d}_{\alpha} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{acd}_{b\alpha\beta} \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha}_{\beta ab} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma a} + 2R^{\alpha}_{\beta ab}\omega^{b}_{\gamma} - R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\omega_{b} \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha b}_{\beta a\gamma} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha}_{\beta\gamma\mu} - R^{\alpha}_{\beta[\gamma a}\omega^{a}_{\mu]} + R^{\alpha a}_{\beta[\gamma\mu]}\omega_{a} \equiv 0,$$

$$\Delta R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu} - 2R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}\omega_{b} - R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\omega^{b}_{\gamma} \equiv 0, \quad \Delta R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu} \equiv 0,$$

из которых видно, что объект кривизны является тензором, содержащим шесть простейших подтензоров R^{a}_{bce}, $R^{ad}_{bc\alpha}$, $R^{acd}_{b\alpha\beta}$, $R^{\alpha}_{\beta ab}$, $R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}$, $R^{\alpha ab}_{\beta\gamma\mu}$ и четыре простых подтензора $\left\{R^{a}_{bc\alpha}, R^{a}_{bcd}, R^{ad}_{bc\alpha}\right\}$, $\left\{R^{ac}_{b\alpha\beta}, R^{acd}_{b\alpha\beta}, R^{ac}_{bd\beta}\right\}$, $\left\{R^{\alpha}_{\beta\gamma a}, R^{\alpha}_{\beta ab}, R^{\alpha b}_{\beta a\gamma}\right\}$, $\left\{R^{\alpha a}_{\beta\gamma\mu}, R^{\alpha ab}_{\beta\mu\gamma}, R^{\alpha a}_{\beta b\mu}\right\}$.

Продолжение дифференциальных уравнений (4_1)—(4_3) приводит к сравнениям по модулю базисных форм ω^{a}, ω^{α}, ω^{α}_{a}:

$$\Delta G^{\alpha}_{a\beta,\gamma} - \left(\delta^{\mu}_{\gamma}G^{\alpha}_{a\beta,b} + \delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha}_{ab,\gamma}\right)\omega^{b}_{\mu} +$$

$$+\left(\delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha}_{a\gamma} + \delta^{\mu}_{\gamma}G^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\gamma}G^{\mu}_{a\beta}\right)\omega_{\mu} + \left(G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} + G^{\alpha b}_{a\beta,\gamma}\right)\omega_{b} \equiv 0,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{a\beta,b} - G^{\alpha}_{ac,b}\omega^{c}_{\beta} + G^{\alpha}_{ab}\omega_{\beta} + \left(G^{\alpha c}_{a\beta,b} + \delta^{c}_{a}G^{\alpha}_{b\beta} + \delta^{c}_{b}G^{\alpha}_{a\beta}\right)\omega_{c} \equiv 0,$$

$$\Delta G^{\alpha,b}_{a\beta,\gamma} - \left(\delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{b}_{c}G^{\mu}_{a\beta} + \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{b}_{a}G^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha,b}_{ac,\gamma} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{b}_{c}G^{\alpha}_{a\gamma}\right)\omega^{c}_{\mu} +$$

$$+\left(G^{\alpha b}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{b}_{a}\right)\omega_{\gamma} + G^{\alpha c,b}_{a\beta,\gamma}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{ab,\beta} - G^{\alpha}_{ab,c}\omega^{c}_{\beta} + \left(\delta^{\gamma}_{\beta}G^{\alpha}_{ab} - \delta^{\alpha}_{\beta}G^{\gamma}_{ab}\right)\omega_{\gamma} + G^{\alpha,c}_{ab,\beta}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha}_{ab,c} + \left(\delta^{e}_{a}G^{\alpha}_{cb} + \delta^{e}_{b}G^{\alpha}_{ac} + \delta^{e}_{c}G^{\alpha}_{ab}\right)\omega_{e} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha,c}_{ab,\beta} - \left(\delta^{\alpha}_{\beta}\delta^{e}_{c}G^{\gamma}_{ab} + \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{c}_{a}G^{\alpha}_{eb} + \delta^{\gamma}_{\beta}\delta^{c}_{b}G^{\alpha}_{ae}\right)\omega^{e}_{\gamma} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{a\beta,\gamma} - G^{\alpha b}_{a\beta,c}\omega^{c}_{\gamma} + \left(\delta^{\mu}_{\beta}G^{\alpha b}_{a\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}G^{\mu b}_{a\beta}\right)\omega_{\mu} + G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b}_{a\beta,c} + \left(\delta^{e}_{a}G^{\alpha b}_{c\beta} - \delta^{b}_{c}G^{\alpha e}_{a\beta}\right)\omega_{e} \equiv 0\,,$$

$$\Delta G^{\alpha b,c}_{a\beta,\gamma} + \left(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{b}_{e}G^{\alpha c}_{a\beta} + \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{c}_{e}G^{\alpha b}_{a\gamma} - \delta^{\alpha}_{\gamma}\delta^{c}_{e}G^{\mu b}_{a\beta} - \delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{c}_{a}G^{\alpha b}_{e\beta}\right)\omega^{e}_{\mu} \equiv 0\,.$$

Компоненты объекта кривизны-кручения удовлетворяют следующим дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм:

$$\Delta T^{\alpha}_{a\beta\gamma} + \delta^{\mu}_{[\beta}T^{\alpha}_{a\gamma]b}\omega^{b}_{\mu} + T^{\alpha b}_{a[\beta\gamma]}\omega_{b} \equiv 0\,,$$

$$\Delta T^{\alpha}_{a\beta b} + 2T^{\alpha}_{abc}\omega^{c}_{\beta} - T^{\alpha c}_{ab\beta}\omega_{c} \equiv 0\,, \tag{6}$$

$$\Delta T^{\alpha b}_{a\beta\gamma} - T^{\alpha b}_{ac\gamma}\omega^{c}_{\beta} - T^{\alpha bc}_{a\gamma\beta}\omega_{c} \equiv 0\,,$$

$$\Delta T^{\alpha}_{abc} \equiv 0\,,\ \Delta T^{\alpha c}_{ab\beta} \equiv 0\,,\ \Delta T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} \equiv 0\,.$$

Теорема. *Объект кривизны-кручения обобщенной билинейной связности является тензором, содержащим три простейших подтензора* T^{α}_{abc}, $T^{\alpha c}_{ab\beta}$, $T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}$ *и два простых подтензора* $\left\{T^{\alpha}_{abc}, T^{\alpha c}_{ab\beta}, T^{\alpha}_{a\beta b}\right\}$, $\left\{T^{\alpha c}_{ab\beta}, T^{\alpha bc}_{a\beta\gamma}, T^{\alpha b}_{a\beta\gamma}\right\}$.

Доказательство следует из дифференциальных сравнений (6).

Рассмотрим канонический случай, когда компоненты G^{α}_{ab} и $G^{\alpha b}_{a\beta}$ обращаются в нуль. Имеем $\tilde{\omega}^{\alpha}_{a} = \omega^{\alpha}_{a} - G^{\alpha}_{a\beta}\omega^{\beta}$, а левые части уравнений (4_2) и (4_3) тождественно равны нулю, тогда уравнения (4_1) упростятся:

$$\Delta \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta} - \delta^{\alpha}_{\beta}\omega_a = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,\gamma}\,\omega^{\gamma} + \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b}\,\omega^{b} + \overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\beta,\gamma}\,\omega^{\gamma}_{b}\,.$$

Утверждение. *В каноническом случае квазитензор G обобщенной билинейной связности редуцируется к квазитензору $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$, при этом объект связности упрощается:*

$$\overset{B0}{\Gamma} = \{\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta},\, 0,\, 0,\, \Gamma^{a}_{b\alpha},\ \Gamma^{a}_{bc},\, \Gamma^{ac}_{b\alpha},\, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma},\, \Gamma^{\alpha}_{\beta a},\, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}\,.$$

При условии что $G^{\alpha}_{ab} = 0$, $G^{\alpha b}_{a\beta} = 0$, выражения (5) для компонент тензора кривизны-кручения примут вид

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{a\beta\gamma} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} - \Gamma^{b}_{a[\beta}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma]} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a[\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]}\,,$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{a\beta b} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b} + \Gamma^{c}_{ab}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} - \overset{0}{G}{}^{\gamma}_{a\beta}\,\Gamma^{\alpha}_{\gamma b}\,,$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha b}_{a\beta\gamma} = -\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} + \Gamma^{cb}_{a\gamma}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a\beta}\,\Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma}\,, \qquad (7)$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{abc} = 0\,,$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha c}_{ab\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}\Gamma^{c}_{ab} - \delta^{c}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\beta b} - \delta^{c}_{b}\,\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}\,,$$

$$\overset{0}{T}{}^{\alpha bc}_{a\beta\gamma} = -\delta^{\alpha}_{\underline{|\beta}}\Gamma^{|\bar{b}c}_{a\gamma}] + \delta^{|\bar{b}}_{a}\Gamma^{\alpha c}_{\underline{|\beta}\gamma}]\,.$$

Утверждение. *Тензор кривизны-кручения в каноническом случае не равен нулю, но содержит нулевые компоненты* $\overset{0}{T}{}^{\alpha}_{abc}$.

Теорема. *Каноническая обобщенная билинейная связность без кривизны-кручения характеризуется следующими свойствами*:

1) альтернированные билинейные пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *образованы альтернациями сверток самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma}$ *и подобъектов* $\Gamma^{a}_{b\alpha}$, $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ *квазитензоров* $\{\Gamma^{a}_{bc}, \Gamma^{a}_{b\alpha}, \Gamma^{ac}_{b\alpha}\}$ *и* $\{\Gamma^{\alpha}_{\beta a}, \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}, \Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *билинейной связности;*

2) пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *образованы свертками самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *и компонент простейших квазитензоров* Γ^{a}_{bc} *и* $\Gamma^{\alpha}_{\beta a}$*;*

3) пфаффовы производные $\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta}$ *квазитензора связности* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *являются алгебраической суммой сверток самого квазитензора* $\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta}$ *с простейшими квазитензорами* $\Gamma^{ac}_{b\alpha}$ *и* $\Gamma^{\alpha a}_{\beta\gamma}$ *и компонент* $\Gamma^{b}_{a\beta}$ *и* $\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}$.

Доказательство. При обращении в нуль тензора кривизны-кручения T из выражений (7) находим

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a[\beta,\gamma]} = \Gamma^{b}_{a[\beta}\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{b\gamma]} + \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a[\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\gamma]},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{a\beta,b} = -\overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta}\Gamma^{c}_{ab} + \overset{0}{G}{}^{\gamma}_{a\beta}\Gamma^{\alpha}_{\gamma b},$$

$$\overset{0}{G}{}^{\alpha b}_{a\gamma,\beta} = \overset{0}{G}{}^{\alpha}_{c\beta}\Gamma^{cb}_{a\gamma} - \overset{0}{G}{}^{\mu}_{a\beta}\Gamma^{\alpha b}_{\mu\gamma} + \delta^{\alpha}_{\gamma}\Gamma^{b}_{a\beta} - \delta^{b}_{a}\Gamma^{\alpha}_{\gamma\beta}.$$

Список литературы

1. *Акивис М.А., Розенфельд Б.А.* Эли Картан (1869—1951). М., 2014.

2. *Белова О.О.* Плоскостная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей // Геометрия многообразий и их приложения : тр. науч. конф. с иностр. участием. Улан-Удэ, 2010. С. 8—13.

3. *Белова О.О.* Нормальная обобщенная аффинная связность, ассоциированная с пространством центрированных плоскостей // ДГМФ. Калининград, 2010. №41. С. 7—12.

4. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

5. *Кулешов А.В.* Обобщенные связности на комплексе центрированных плоскостей в проективном пространстве // ДГМФ. Калининград, 2010. №41. С. 75—85.

6. *Шевченко Ю.И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

7. *Шевченко Ю.И.* Приемы Лаптева и Лумисте задания связности в главном расслоении // ДГМФ. Калининград, 2006. №37. С. 179—187.

8. *Шевченко Ю.И.* Связности, ассоциированные с распределением плоскостей в проективном пространстве. Калининград, 2009.

9. *Akivis M.A., Shelekhov A.M.* Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs // J. Math. Sci. 2011. Vol. 177, №522.

10. *Belova O.O.* Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 605—632.

11. *Belova O.* Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Mathematics. 2021. Vol. 9, №7. Art. №782. https://doi.org/10.3390/math9070782.

12. *Katanaev M.O.* Geometric Methods in Mathematical Physics. 2016. arXiv:1311.0733v3.

13. *Mansouri A.-R.* An extension of Cartan's method of equivalence to immersions:I. Necessary conditions // Differential Geometry and its Applications. 2009. Vol. 27, №5. P. 635—646.

14. *Polyakova K. V.* Parallel displacements on the surface of a projective space // J. Math. Sci. 2009. Vol. 162, №5. P. 675—709.

15. *Rahula M.* The G.F. Laptev method: fundamental objects of mappings // J. Math. Sci. 2011. Vol. 174, № 675.

16. *Scholz E.* H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal, 2010.

MSC 2010: 58A05, 53A20, 53A35

O. O. Belova
Immanuel Kant Baltic Federal University
14 A. Nevskogo St., Kaliningrad, 236016, Russia
olgaobelova@mail.ru
doi: 10.5922/0321-4796-2021-53-3

Generalized bilinear connection on the space of centered planes

Submitted on December 28, 2021

We continue to study the space of centered planes in projective space P_n. In this paper, we use E. Cartan's method of external forms and the group-theoretical method of G.F. Laptev to study the space of centered planes of the same dimension. These methods are successfully applied in physics.

In a generalized bundle, a bilinear connection associated with a space is given. The connection object contains two simplest subtensors and subquasi-tensors (four simplest and three simple subquasi-tensors). The object field of this connection defines the objects of torsion, curvature-torsion, and curvature. The curvature tensor contains six simplest and four simple subtensors, and curvature-torsion tensor contains three simplest and two simple subtensors.

The canonical case of a generalized bilinear connection is considered.

Keywords: projective space, space of centered planes, generalized bilinear connection, torsion, curvature

References

1. *Akivis, M.A., Rosenfeld, B.A.*: Eli Cartan (1869—1951). Moscow (2014).

2. *Belova, O. O.:* Plane generalized affine connection associated with space of centered planes. Geometry of manifolds and its applications, Proceedings of scientific. conf. with int. participation. Ulan-Ude, 8—13 (2010).

3. *Belova, O. O.:* Normal generalized affine connection associated with space of centered planes. DGMF. Kaliningrad, 41, 7—12 (2010).

4. *Evtushik, L. E., Lumiste, Yu. G., Ostianu, N. M., Shirokov, A. P.:* Differential-geometric structures on manifolds. J. Soviet Math., **14**:6, 1573—1719 (1980).

5. *Kuleshov, A. V.:* Generalized connections on the complex of centered planes in projective space. DGMF. Kaliningrad, 41, 75—85 (2010).

6. *Shevchenko, Yu. I.*: Clothings of centreprojective manifolds. Kaliningrad (2000).

7. *Shevchenko, Yu. I.*: Laptev's and Lumiste's tricks for specifying a connection in a principal bundle. DGMF. Kaliningrad, 37, 179—187 (2006).

8. *Shevchenko, Yu. I.:* Connections Associated with the Distribution of Planes in Projective Space. Kaliningrad (2009).

9. *Akivis, M. A., Shelekhov, A. M.*: Cartan — Laptev method in the theory of multidimensional three-webs. J. Math. Sci., **177**:522 (2011).

10. *Belova, O. O.*: Connections in fiberings associated with Grassman manifold and the space of centered planes. J. Math. Sci., **162**:5, 605—632 (2009).

11. *Belova, O.*: Generalized affine connections associated with the space of centered planes // Maths., **9**:7, 782 (2021). https://doi.org/10.3390/math9070782.

12. *Katanaev, M. O.*: Geometric Methods in Mathematical Physics (2016). arXiv:1311.0733v3.

13. *Mansouri, A.-R.*: An extension of Cartan's method of equivalence to immersions: I. Necessary conditions. Differential Geometry and its Applications, **27**:5, 635—646 (2009).

14. *Polyakova, K. V.*: Parallel displacements on the surface of a projective space. J. Math. Sci., **162**:5, 675—709 (2009).

15. *Rahula, M.*: The G. F. Laptev method: fundamental objects of mappings. J. Math. Sci., **174**:675 (2011).

16. *Scholz, E.*: H. Weyl's and E. Cartan's proposals for infinitesimal geometry in the early 1920s. University Wuppertal (2010).