$$\tilde{R}^{s_{12}}_{p_0 q_1} = R^{s_{12}}_{p_0 p_1} V^{p_1}_{q_1} + R^{s_{12}}_{r_1 t_1} V^{r_1}_{p_0} V^{t_1}_{q_1}, \quad \tilde{R}^{s_{12}}_{p_1 q_1} = R^{s_{12}}_{r_1 t_1} V^{r_1}_{[p_1} V^{t_1}_{q_1]}.$$

Выберем формы $\theta^{s_0}_{p_{01}}$ в виде

$$\theta^{s_0}_{p_0} = R^{s_0}_{p_0 q_0} \theta^{q_0} + 2 R^{s_0}_{p_0 q_1} \tilde{\omega}^{q_1}, \quad \theta^{s_0}_{p_1} = R^{s_0}_{p_1 q_0} \theta^{q_0} + R^{s_0}_{p_1 q_1} \tilde{\omega}^{q_1}, \tag{I2}$$

тогда уравнения (6) примут вид

$$d\theta^{s_0} = \tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_0} \theta^{p_0} \wedge \theta^{q_0} + 2\tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_1} \theta^{p_0} \wedge \tilde{\omega}^{q_1} + \tilde{R}^{s_0}_{p_1 q_1} \tilde{\omega}^{p_1} \wedge \tilde{\omega}^{q_1}, \tag{I3}$$

где

$$\tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_0} = R^{s_0}_{[p_0 q_0]} - R^{s_0}_{s_1 [p_0} V^{s_1}_{q_0]}, \quad \tilde{R}^{s_0}_{p_0 q_1} = R^{s_0}_{p_0 q_1} - R^{s_0}_{s_1 [p_0} V^{s_1}_{q_1]}, \quad \tilde{R}^{s_0}_{p_1 q_1} = -R^{s_0}_{s_1 [p_1} V^{s_1}_{q_1]}.$$

Уравнения (II),(I3) с точностью до обозначений составляют систему (I). Многообразие V при условиях (I2) имеет специальное строение. Деривационные формулы подвижного векторного репера $e_{p_{01}}$ касательного пространства $T_{\varkappa+r}$ размерности $\varkappa+r$ к многообразию V в фиксированной точке имеют вид $\delta e_{p_0} = \bar{\theta}^{s_1}_{p_0} e_{s_1}$, $\delta e_{p_1} = \bar{\theta}^{s_1}_{p_1} e_{s_1}$, где $\bar{\theta}^{s_1}_{p_0} = \omega^{s_1}_{p_0} \big|_{\theta^{s_{01}}=0}$, $\bar{\theta}^{s_1}_{p_1} = (\omega^{s_1}_{p_1} + C^{s_1}_{p_1 q_2} \omega^{q_2}) \big|_{\theta^{s_{01}}=0}$.

Значит, касательное пространство имеет r-мерное подпространство $L_r \subset T_{\varkappa+r}$, а фактор-пространство $T_{\varkappa+r} | L_r$ натянуто на $\varkappa$ инвариантных векторов. Итак, доказана

Т е о р е м а. Обобщенное главное расслоение $G \backslash V\ (V)$ со специальной базой V, в котором задана связность по Г.Ф.Лаптеву (как в главном расслоении), является пространством общей фундаментально-групповой связности.

З а м е ч а н и я. 1) Если положить $\theta^{s_0}_{p_1} = 0$, $\omega^{s_{12}}_{p_1} = 0$, то система (9) дает структурные уравнения пространства элементов Лаптева [1, с.317], [7, с.441], [9]. 2) Понятие обобщенного расслоения (не обязательно главного) соединяет два крайних случая: а) расслоение с заданным сечением, в котором базу отождествляют с ее образом, поэтому говорят о приклеивании расслоения к базе (см., например, [2, с.110]); б) касательное расслоение над аффинным пространством, когда слои отождествляются с базой. 3) Способ Лаптева задания связностей в главных расслоениях уже применялся для конкретных обобщенных расслоений [10, с.69], [11, с.37], [12].

Библиографический список

1. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий//Тр.Моск.матем.о-ва/ГИТТЛ.М.,1953.Т.2.С.275-382.

2. Е в т у ш и к Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях//Проблемы

геометрии/ВИНИТИ .М.,1979.Т.9.248с.

3. Л а п т е в Г.Ф. О многообразиях геометрических элементов с дифференциальной связностью//Докл.АН СССР.1950.Т.73.№1.С.17-20.

4. Л а п т е в Г.Ф. О фундаментально-групповой связности многообразия однородных пространств// Успехи матем.наук.1951.Т.6.Вып.1. С.164-165.

5. Л а п т е в Г.Ф. Многообразия, погруженные в обобщенные пространства//Тр. IV Всес.матем.съезда,1961.Л.:Наука,1964.Т.2.С.226-233.

6. М а л а х о в с к и й В.С. Дифференциальная геометрия многообразий фигур и пар фигур в однородном пространстве//Тр.геометр.семинара / ВИНИТИ.М.,1969.Т.2.С.179-206.

7. Л у м и с т е Ю.Г. Связности в однородных расслоениях//Матем. сб.1966.Т.69.С.434-469.

8. О с т и а н у Н.М. Ступенчато-расслоенные пространства//Тр. геометр.семинара/ВИНИТИ.М.,1974.Т.5.С.259-309.

9. Ш е в ч е н к о Ю.И. О фундаментально-групповой связности// Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.науч. тр./Калинингр.ун-т.Калининград,1985.Вып.16.С.104-109.

10. Л а п т е в Г.Ф., Остиану Н.М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности.I // Тр.геом. семинара/ВИНИТИ.М.,1971.Т.3.С.49-93.

11. С т о л я р о в А.В. Двойственные линейные связности на оснащенных многообразиях пространства проективной связности//Проблемы геометрии/ВИНИТИ.М.,1977.Т.8.С.25-46.

12. Ш е в ч е н к о Ю.И. Об оснащении Картана//Дифференциальная геометрия многообразий фигур/Калинингр. ун-т.Калининград,1983.Вып. 14.С.107-110.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ ЛИНЕЙЧАТЫХ КВАДРИК С ФОКАЛЬНЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ R

С.В.Ш м е л е в а
(Калининградское ВИУИВ)

В трехмерном проективном пространстве рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}$ линейчатых невырожденных квадрик Q, имеющая четверку невырождающихся фокальных поверхностей (A_α) ($\alpha = 0,1,2,3$), описанных вершинами автополярного тетраэдра третьего рода квадрики Q. Доказано, что каждая из фокальных поверхностей (A_α)-сдвоенная, и исследован подкласс $\mathcal{L}_0$ конгруэнций $\mathcal{L}$, в котором поверхности (A_α)

являются поверхностями R [1 ,с.218].Конгруэнции $(A_1 A_2)$ и $(A_0 A_3)$, ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{B}_0$,являются линейными с общими директрисами.

1.Отнесем конгруэнцию $\mathcal{K}$ линейчатых невырожденных квадрик к реперу $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$,где A_0 и A_3 –фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{K}$, а A_i ($i, \hat{i}, k = 1,2$)– точки пересечения прямолинейных образующих квадрики Q ,проходящих через A_0 и A_3 .В этом репере квадрика Q и конгруэнции $\mathcal{K}$ определяются соответственно уравнениями [2 ,с.44]:

$$x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0, \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} \omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^{\hat{i}} = a_{ik}^{\hat{i}} \omega^k, \quad \omega_i^3 - \omega^{\hat{i}} = c_{ik} \omega^k, \\ \omega_i^0 - \omega_3^{\hat{i}} = \lambda_{ik} \omega^k, \quad \omega_3^i = b_k^i \omega^k, \quad \Omega = h_k \omega^k, \end{cases} \qquad (1.2)$$

где

$$\omega^i \overset{def}{=} \omega_0^i, \quad \Omega \overset{def}{=} \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \qquad (1.3)$$

$$c_{12} = c_{21}, \quad b_1^1 \lambda_{12} - b_2^2 \lambda_{21} + b_1^2 \lambda_{22} - b_2^1 \lambda_{11}, \qquad (1.4)$$

$$b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 \neq 0, \quad (b_i^{\hat{i}} + \lambda_{ii})(1 + c_{i\hat{i}}) - (b_{\hat{i}}^{\hat{i}} + \lambda_{i\hat{i}}) c_{ii} \neq 0 \qquad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq \hat{i}$ и по индексам i и $\hat{i}$ суммирование не производится.

Назовем поверхности (A_1) и (A_2) ассоциированными с парой фокальных поверхностей (A_0) и (A_3) .Так как конгруэнция линейчатых квадрик имеет в общем случае восемь фокальных поверхностей,то с ней ассоциируется 28 пар поверхностей.Однако,если потребовать,чтобы ассоциированные поверхности хотя бы одной пары были фокальными,то конгруэнция квадрик обладает только четырьмя сдвоенными фокальными поверхностями, из которых можно образовать лишь две взаимно ассоциированные пары поверхностей,т.к.фокальные точки каждой пары не лежат на одной прямолинейной образующей квадрики.

О п р е д е л е н и е 1. Конгруэнцией $\mathcal{B}$ называется конгруэнция $\mathcal{K}$ линейчатых невырожденных квадрик,присоединенные поверхности (A_1) и (A_2) которой являются фокальными.

Т е о р е м а 1. Конгруэнции $\mathcal{B}$ существуют и определяются с произволом трех функций двух аргументов.Фокальные поверхности (A_α) (α=0,1,2,3) конгруэнции $\mathcal{B}$ являются сдвоенными.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как поверхности (A_1) и (A_2) фокальные,то

$$a_{11}^2 = a_{12}^2 = a_{21}^1 = a_{22}^1 = 0. \qquad (1.6)$$

Учитывая (1.5) в (1.2),убеждаемся,что общее решение полученной системы уравнений Пфаффа зависит от трех функций двух аргументов.

Обозначим

$$c = c_{11} c_{22} - c_{12}^2, \quad \lambda = \lambda_{11} \lambda_{22} - \lambda_{12} \lambda_{21}. \qquad (1.7)$$

Условия двукратности фокальных точек A_0 и A_3 (см.(7) из[1]) выполнены

$$c\,(c_{i\hat{i}} a_{\hat{i}\hat{i}}^i - c_{\hat{i}\hat{i}} a_{\hat{i}i}^i) = 0, \quad \lambda\,(\lambda_{i\hat{i}} a_{ii}^{\hat{i}} - \lambda_{ii} a_{i\hat{i}}^{\hat{i}}) = 0. \qquad (1.8)$$

Следовательно,фокальные поверхности (A_0) и (A_3) –сдвоенные. В силу равноправия пар поверхностей (A_0), (A_3) и (A_1),(A_2) конгруэнции $\mathcal{B}$, фокальные поверхности (A_1) и (A_2) также являются сдвоенными,а значит конгруэнция $\mathcal{B}$ имеет только четыре различные фокальные поверхности.Теорема доказана.

Учитывая (1.6) в уравнениях (4) из [2] ,получим уравнения ассоциированных квадрик Q_i конгруэнции $\mathcal{B}$:

$$h_i x^i x^{\hat{i}} + \lambda_{ki} x^k x^3 + c_{ki} x^k x^0 = 0. \qquad (1.9)$$

2. О п р е д е л е н и е 2. Конгруэнцией $\mathcal{B}_0$ называется конгруэнция $\mathcal{B}$,обладающая следующими свойствами: 1)сети линий на поверхностях (A_α) ,огибаемые прямолинейными образующими квадрики Q соответствуют и являются сетями R ;2)фокальные точки A_1, A_2 полярно сопряжены относительно ассоциированных квадрик Q_1 и Q_2 .

Т е о р е м а 2. Существует однопараметрическое семейство проективно неэквивалентных конгруэнций $\mathcal{B}_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.Из соответствия сетей,огибаемых прямолинейными образующими $A_0 A_i$ и $A_3 A_i$ на поверхностях (A_α) , следует,что они определяются одним и тем же уравнением $\omega^1 \omega^2 = 0$.Следовательно,

$$1 + c_{12} = 0, \quad b_{\hat{i}}^{\hat{i}} + \lambda_{ii} = 0. \qquad (2.1)$$

Так как прямолинейные конгруэнции $(A_0 A_1)$ и $(A_0 A_2)$ являются конгруэнциями W ,то

$$\lambda_{i\hat{i}} = b_i^{\hat{i}} c_{\hat{i}\hat{i}} \qquad (2.2)$$

Из (1.9) следует,что полярная сопряженность точек A_1 и A_2 относительно квадрик Q_1 и Q_2 характеризуется соотношениями:

$$h_1 = 0, \quad h_2 = 0. \qquad (2.3)$$

В силу невырожденности поверхности (A_3) можно так пронормировать вершины репера,чтобы

$$b_1^2 = b_2^1 = 1. \qquad (2.4)$$

Геометрически такая нормировка характеризуется совмещением единичных точек ребер $A_0 A_3$, $A_1 A_2$ с фокусами лучей прямолинейных конгруэнций,описанных этими ребрами.

Обозначая $c = c_{11}$ и учитывая (2.1) – (2.4),(1.6) в (1.2),приводим систему уравнений Пфаффа конгруэнции $\mathcal{B}_0$ к виду:

14*

$$\begin{cases} \omega_0^3 = \omega_3^0 = \omega_i^{\hat{i}} = \omega_0^0 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^3 = 0, & \omega_i^3 = c\,\omega^{\hat{i}}, \\ \omega_i^0 = \omega_i^3, \quad \omega_3^i = \omega^{\hat{i}}, \quad dc = 0, & \end{cases} \qquad (2.5)$$

причем из (I.5) и из того,что конгруэнция $\mathcal{L}_0$ -это двупараметрическое семейство квадрик,следует .

$$c\,(c^2-1) \neq 0. \qquad (2.6)$$

Система (2.5) - вполне интегрируема и определяет однопараметрическое семейство проективно неэквивалентных конгруэнций $\mathcal{L}_0$.Обозначим:

$$B_0 = A_1 + A_2, \quad B_1 = A_1 - A_2, \quad B_2 = A_0 + A_3, \quad B_3 = A_0 - A_3, \qquad (2.7)$$

$$\theta^1 = \omega^1 + \omega^2, \quad \theta^2 = \omega^2 - \omega^1 \qquad (2.8)$$

Точки B_α являются фокусами лучей A_1A_2 , A_0A_3 прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3) соответственно,а уравнение $\theta^1\theta^2=0$ определяет торсы этих конгруэнций.

Т е о р е м а 3. Прямолинейные конгруэнции (A_1A_2) и (A_0A_3),ассоциированные с конгруэнцией $\mathcal{L}_0$,являются линейными с общими директрисами B_0B_2 и B_1B_3 .

Д о к а з а т е л ь с т в о.Дифференцируя (2.7) с использованием (2.5),находим

$$dB_0 = c\,\theta^1 B_2, \quad dB_1 = c\,\theta^2 B_3, \quad dB_2 = \theta^1 B_0, \quad dB_3 = -\theta^2 B_1. \qquad (2.9)$$

Следовательно,прямые B_0B_2 и B_1B_3 ,пересекающие лучи A_1A_2 и A_0A_3, одинаковы для всех лучей прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

3.С квадрикой $Q \in \mathcal{L}_0$ ассоциируются четыре коники H_α ,являющиеся сечениями квадрики Q плоскостями $(B_\alpha A_0 A_3)$ (для $\alpha=0,1$) и плоскостями $(B_\alpha A_1 A_2)$ (для $\alpha=2,3$). Коники H_0, H_1, H_2, H_3 определяются соответственно уравнениями:

$$\begin{cases} (x^1)^2 - x^0x^3 = 0, & x^1 - x^2 = 0, & (x^1)^2 + x^0x^3 = 0, & x^1 + x^2 = 0, \\ (x^0)^2 - x^1x^2 = 0, & x^0 - x^3 = 0, & (x^0)^2 + x^1x^2 = 0, & x^0 + x^3 = 0. \end{cases} \qquad (3.I)$$

Т е о р е м а 4. Точки пересечения с квадрикой Q прямых A_0A_3, $B_\alpha B_2$, $B_\alpha B_3$ (для $\alpha=0,1$) , прямых A_1A_2 , $B_\alpha B_0$, $B_\alpha B_1$ (для $\alpha=2,3$) являются фокальными точками H_α .Фокальные семейства конгруэнции (H_α) являются кратными и соответствуют торсам прямолинейных конгруэнций (A_1A_2) и (A_0A_3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим,например,конику H_2 (для H_0, H_1, H_3 -рассуждения аналогичны).Фокальные точки коники H_2 и фокальные семейства конгруэнции (H_2) определяются системой уравнений:

$$\begin{cases} (x^0)^2 - x^1x^2 = 0, \quad x^0 - x^3 = 0, \quad \theta^2(x^1 - x^2) = 0, \\ x^0\left(\theta^1(x^1+x^2) - 2c\,(x^1\omega^1 + x^2\omega^2)\right) = 0, \end{cases} \qquad (3.2)$$

откуда следует,что фокальному семейству $\theta^2=0$ соответствуют фокальные точки A_1, A_2, $B_2 \pm i\,B_1$,а фокальному семейству $\theta^1=0$ соответствуют фокальные точки $B_2 \pm B_0$.

Библиографический список

I.Ф и н и к о в С.П. Теория конгруэнций /ГИТТЛ.М.-Л.1950.

2.М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью//Дифференциальная геометрия многообразий фигур:Межвуз.темат.сб.научн.тр./Калинингр.ун-т.Калининград, 1981.Вып.I2.С.44-47.

УДК 514.75

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ ВИДЕ КОНГРУЭНЦИЙ ПАР КОНИК В A_3

Е.А.Щ е р б а к
(Калининградский государственный университет)

В трехмерном аффинном пространстве рассматриваются специальные виды конгруэнций пар коник $\{F_1, F_2\}$,где коника F_1 лежит на инвариантной цилиндрической поверхности Φ ,а коника F_2 проходит через центр коники F_1 и имеет центр,лежащий на конике F_1. Плоскости коник F_1 и F_2 не параллельны.Назовем такие конгруэнции конгруэнциями M.

Исследования проводятся в частично- канонизированном репере $R=\{A, \bar{e}_\alpha\}$ ($\alpha = 1,2,3$),начало A которого совмещено с центром коники F_1, концы E_i векторов $\bar{e}_i$ ($i=1,2$) расположены на конике F_1 так,что векторы $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ сопряжены относительно F_1 ,причем конец E_1 вектора $\bar{e}_1$ помещен в центр коники F_2 .Вектор $\bar{e}_3$ параллелен образующей цилиндрической поверхности Φ .

Уравнения коник F_1, F_2 и цилиндрической поверхности Φ в выбранном репере имеют соответственно вид:

$$F_1:\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0, \quad x^3 = 0, \qquad (I)$$

$$F_2:\ (x^1)^2 + 2a\,x^1x^3 + b\,(x^3)^2 - 2x^1 - 2a\,x^3 = 0, \quad x^2 + c\,x^3 = 0, \qquad (2)$$

$$\Phi:\ (x^1)^2 + (x^2)^2 - 1 = 0. \qquad (3)$$

Из условия инвариантности цилиндрической поверхности Φ имеем:

$$\omega^1 = \omega^2 = \omega_1^1 = \omega_2^2 = \omega_3^1 = \omega_3^2 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_1^2 = 0. \qquad (4)$$

Система уравнений Пфаффа конгруэнции M состоит из уравнений (4) и следующих уравнений:

$$\begin{cases} \omega_1^2 = \Gamma_1^{2i}\Omega_i, \quad \omega^3 = \Gamma^{3i}\Omega_i, \quad da - a\,\omega_3^3 = \Gamma_a^i\,\Omega_i, \\ db - 2b\,\omega_3^3 = \Gamma_b^i\,\Omega_i, \quad dc - c\,\omega_3^3 = \Gamma_3^i\,\Omega_i, \end{cases} \qquad (5)$$