УДК 514.76

А. В. Кулешов
(Российский государственный университет им. И. Канта)

СТРУКТУРНЫЕ ФОРМЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ ПОДМНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрено гладкое многообразие и подмногообразие в нем. На основе аналитического аппарата для многообразия построен аппарат для подмногообразия и найдена взаимосвязь между ними. Показано, что общая формула для этих форм в случае поверхности проективного пространства дает формулу, совпадающую с полученной К. В. Поляковой.

Рассмотрим гладкое многообразие V_n со структурными уравнениями Лаптева [1; 2]

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega^I_J \;\; (I, J, K=\overline{1,n}) \tag{1}$$

и их продолжениями

$$D\omega^I_{J_1 \dots J_p} = \sum_{s=1}^{p} C^s_p \omega^K_{(J_1 \dots J_s} \wedge \omega^I_{J_{s+1} \dots J_p)K} + \omega^K \wedge \omega^I_{J_1 \dots J_p K} \; (p=1,2,3,\dots), \tag{2}$$

причем будем полагать, что формы $\omega^I_{J_1 \dots J_p}$ симметричны по всем нижним индексам при любом p.

Дифференциальные уравнения подмногообразия V_m многообразия V_n запишем в виде [3]:

$$\omega^a = \Lambda^a_i \omega^i \quad (i, j, k = \overline{1,m};\, a,b,c = \overline{m+1,n}). \tag{3}$$

Продолжая (3), последовательно получаем уравнения (см., напр., [3])

$$d\Lambda_i^a - \Lambda_j^a \omega_i^j + \Lambda_i^b \omega_b^a - \Lambda_i^b \Lambda_j^a \omega_b^j + \omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j,$$

$$\Delta\Lambda_{ij}^a - \Lambda_{ij}^b \Lambda_k^a \omega_b^k - 2\Lambda_{k(i}^a \Lambda_{j)}^b \omega_b^k - \Lambda_k^a (\omega_{ij}^k + \Lambda_j^b \omega_{ib}^k) + \omega_{ij}^a +$$
$$+ \Lambda_j^b \omega_{ib}^a - \Lambda_k^a \Lambda_i^b (\omega_{bj}^k + \Lambda_j^c \omega_{bc}^k) + \Lambda_i^b (\omega_{bj}^a + \Lambda_j^c \omega_{bc}^a) = \Lambda_{ijk}^a \omega^k,$$

где

$$\Delta\Lambda_{ij}^a = d\Lambda_{ij}^a - \Lambda_{ik}^a \omega_j^k - \Lambda_{kj}^a \omega_i^k + \Lambda_{ij}^b \omega_b^a,$$

$\Lambda_i^a, \Lambda_{ij}^a, \Lambda_{ijk}^a, \ldots$ — компоненты разнопорядковых фундаментальных объектов подмногообразия $\Lambda^1 = \{\Lambda_i^a\}$, $\Lambda^2 = \{\Lambda^1, \Lambda_{ij}^a\}$, $\Lambda^3 = \{\Lambda^2, \Lambda_{ijk}^a\}, \ldots$ Заметим, что эти компоненты симметричны по всем нижним индексам в силу симметричности форм $\omega_{J_1 \ldots J_p}^I$.

Подставляя (3) в (1), получим:

$$D\omega^i = \omega^j \wedge \theta_j^i, \qquad (4)$$

$$\theta_j^i = \omega_j^i + \Lambda_j^a \omega_a^i. \qquad (5)$$

Наша задача — ограничить аппарат (1) (2) на V_m, т.е. получить структурные уравнения на θ_j^i и их продолжения — формы $\theta_{j_1 \ldots j_p}^i$ (p=2, 3,…), причем такие уравнения должны быть аналогичны (1), (2), а сами формы — симметричны по всем нижним индексам.

Дифференцируя (5) и подставляя (1) в полученные уравнения, имеем [3]:

$$D\theta_j^i = \theta_j^k \wedge \theta_k^i + \omega^k \wedge \theta_{jk}^i, \qquad (6)$$

где

$$\theta_{jk}^i = \omega_{jk}^i + 2\Lambda_{(j}^a \omega_{k)a}^i + \Lambda_{jk}^a \omega_a^i + \Lambda_{(j}^a \Lambda_{k)}^b \omega_{ab}^i. \qquad (7)$$

Аналогичным образом получим структурные уравнения на формы θ_{jk}^i:

$$D\theta^i_{jk} = \theta^l_{jk} \wedge \theta^i_l + \theta^l_j \wedge \theta^i_{kl} + \theta^l_k \wedge \theta^i_{jl} + \omega^l \wedge \theta^i_{jkl},$$

где

$$\begin{aligned}\theta^i_{jkl} = \omega^i_{jkl} + 3\Lambda^a_{(j}\omega^i_{kl)a} + 3\Lambda^a_{(jk}\omega^i_{l)a} + \Lambda^a_{jkl}\omega^i_a + 3\Lambda^a_{(j}\Lambda^b_k\omega^i_{l)ab} + \\ + 3\Lambda^a_{(jk}\Lambda^b_{l)}\omega^i_{ab} + \Lambda^a_{(j}\Lambda^b_k\Lambda^c_{l)}\omega^i_{abc}.\end{aligned} \tag{8}$$

Возникает вопрос: каков общий вид структурных уравнений на формы $\theta^i_{i_1,\dots i_p}$? Ответ на него дает доказанное методом математической индукции

Утверждение. Для любого p=2, 3,… структурные уравнения на формы $\theta^i_{i_1,\dots i_p}$ имеют вид:

$$D\theta^i_{j_1\dots j_p} = \sum_{s=1}^{p} C^s_p \theta^k_{(j_1\dots j_S} \wedge \theta^i_{j_{S+1}\dots j_p)k} + \theta^k \wedge \theta^i_{j_1\dots j_p k}, \tag{9}$$

где формы $\theta^i_{i_1,\dots i_p}$ выражаются через исходные формы $\omega^I_{J_1\dots J_p}$ следующим образом:

$$\theta^i_{i_1 i_2\dots i_p} =$$

$$= p!\sum_{\alpha=0}^{p}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\substack{\tau_1+\tau_2+\dots+\tau_{\alpha+1}=p \\ \tau_1,\dots,\tau_\alpha \ge 1}}\frac{1}{\tau_1!\tau_2!\dots\tau_\alpha!\tau_{\alpha+1}!}\Lambda^{a_1}_{(j_1\dots j_{\tau_1}}\Lambda^{a_2}_{k_1\dots k_{\tau_2}}\dots\Lambda^{a_\alpha}_{m_1\dots m_{\tau_\alpha}}\omega^i_{n_1\dots n_{\tau_{\alpha+1}})a_1\dots a_\alpha}, \tag{10}$$

причем наборы $(j_1\dots j_{\tau_1}k_1\dots k_{\tau_2}\ \dots\ m_1\dots m_{\tau_\alpha}n_1\dots n_{\tau_{\alpha+1}})$ и $(i_1 i_2\dots i_p)$ совпадают, т. е. $j_1\dots j_{\tau_1}$ — это первые τ_1 индексов из набора $(i_1 i_2\dots i_p)$, $k_1\dots k_{\tau_2}$ — следующие τ_2 индексов из того же набора и т. д.

Из (10) при *p=2* получаем (7), а при *p=3* получаем (8). Формулы (10) показывают, что $\theta^i_{i_1,\dots i_p}$ симметричны по всем нижним индексам. Итак, мы ограничили аппарат (1), (2) на подмногообразие V_m. Структурными формами этого подмногообразия являются ω^i, θ^i_j, $\theta^i_{i_1,\dots i_p}$, а его структурными уравнениями — (4), (6), (9).

Из общей формулы (10) можно получить ее конкретный вид для заданного подмногообразия. Возьмем, к примеру, поверхность в проективном пространстве P_n, рассматриваемую как семейство точек. Структурные уравнения P_n имеют вид [4]:

$$\begin{aligned} D\omega^I &= \omega^J \wedge \omega^I_J, \\ D\omega^I_J &= \omega^K_J \wedge \omega^I_J + \omega^K \wedge \omega^I_{JK}, \\ D\omega_J &= \omega^K_J \wedge \omega_K, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$\omega^I_{JK} = -\delta^I_J \omega_K - \delta^I_K \omega_J. \tag{12}$$

Имеем

$$\omega^I_{J_1 \ldots J_p} = 0 \quad \forall p \geq 3. \tag{13}$$

Тогда из (10) с учетом (12) и (13) получим

$$\theta^i_{jk} = -2\delta^i_{(j}\omega_{k)} - 2\Lambda^{\ a}_{(j}\delta^i_{k)}\omega_a + \Lambda^{\ a}_{jk}\omega^i_a. \tag{14}$$

$$\theta^i_{j_1 \ldots j_p} = -(\delta^i_{j_1}\Lambda^a_{j_2 \ldots j_p} + \sum_{s=2}^{p-1} \delta^i_{j_s}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{s-1} j_{s+1} \ldots j_{p-1}} + \delta^i_{j_p}\Lambda^a_{j_1 \ldots j_{p-1}})\omega_a + \\ + \Lambda^a_{j_1 \ldots j_p}\omega^i_a, \ p \geq 3. \tag{15}$$

Таким образом, для поверхности общая формула (10) дает нам выражения (14) и (15). Заметим, что эти выражения совпадают с выражениями для структурных форм поверхности проективного пространства, выведенными К. В. Поляковой [5].

Список литературы

1. *Лаптев Г. Ф.* Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии // Тр. геом. семин. / ВИНИТИ. М., 1966. Т. 1. С.139—189.

2 *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9. С. 5—247.

3. *Шевченко Ю. И.* Оснащения голономных и неголономных гладких многообразий. Калининград, 1998.

4. *Шевченко Ю. И.* Оснащения центропроективных многообразий. Калининград, 2000.

5. *Полякова К. В.* О голономности поверхности проективного пространства // XXX науч. конф. проф.-преп. состава, науч. сотр., асп. и студ: Тезисы докладов. Калининград, 1999. Ч. 6. С. 7—8.

A. Kuleshov

STRUCTURE FORMS OF HIGHER ORDERS
OF SUBMANIFOLDS

Smooth manifold and submanifold in it are considered. On the base of analytic apparatus for the manifold the apparatus for the submanifold is constructed, and relationship between them is found. It is shown that general formula for this forms in the case of surface of the projective space gives the formula coinciding with K. Polyakova's one.

УДК 514.75

Т. Ю. Максакова

(Российский государственный университет им. И. Канта)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ Λ-ПОДРАССЛОЕНИЯ *WH*-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассматриваются вырожденные трехсоставные распределения проективного пространства, которые названы кратко WH-распределениями [3]. Введены двойственные нормальные связности в расслоениях нормалей 1-го и 2-го рода Λ-подрасслоения данного WH-распределения.