Such hyperstrips are shotly denoted by H_r (L) . Representation of hyperstrip H_r (L) in a frame of the first order is given and the existence theorem is proved: I_n an n-dimensional proective space regular hyperstrips H_r (L) exist and are defined with arbitrariness of 2(n-r-1)+(n-m-1)(m-r)+1 functions of r arguments. The conditions of invariance of normalizations of the hiperstrip H_r (L) in the sence of Norden-Chakmazyan and distributions associated to it: -distributions of equipped planes L(A); L-distributions of planes

$_{n-m-1}(A) = N_{n-m}(A) \cap \chi_{n-r-1}(A)$ are determined. The equipping objects of hyperstrip H_r (L) which define not only the invariant normalization in the sence of Norden-Chakmazyan for the hyperstrip, -distribution and L -distributions but also point $\{M_J\}$ and tangential $\{\tau^K\}$ invariant frames respectively are introduced. Scopes of equipping objects in differential neighborhoods of the first, second and third orders of a generating element of the hyperstrip H_r (L), which make it possible in the interior invariant way to join fields of dual to each other normals of the first and the second order in the sence of Norden-Chakmazyan to the hyperstrip H_r (L) **,** L-distribution, -distribution are constructed. The point $\{M_J\}$ and tangential $\{\tau^K\}$ frames are joined in an interior way in the differential neighborhood of the third order to the hyperstrip H_r (L).

УДК 514.76+514.85

РИМАНОВЫ ПРОСТРАНСТВА С ОБЩИМ НАБОРОМ ПЕРВЫХ ИНТЕГРАЛОВ УРАВНЕНИЙ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ

А.А. З а й ц е в

(*Калининградский государственный университет)*

Изучается следующее бинарное отношение в классе римановых пространств, снабженных общими координатными системами: пространства M и $\hat{M}$ таковы, что метрика $\hat{M}$ является первым интегралом уравнений геодезических в M. Выводится уравнение, связывающее метрики M и $\hat{M}$, и доказывается симметричность изучаемого отношения (его рефлексивность очевидна). Подробно анализируются 2 случая: 1) метрика M постоянна, 2) специальный вид метрики двумерного пространства M. Отмечена связь изучаемой проблемы с теорией интегрируемых гамильтоновых систем, рассматриваемых в механике и теоретической физике.

1. Проблема, которая изучается в данной работе, естественным образом связана с некоторыми вопросами теории натуральных гамильтоновых систем, рассматриваемых в механике и теоретической физике. К ним относятся задача

Дарбу-Уиттекера построения интегрируемых гамильтонианов с двумя степенями свободы (ее постановка и полное решение имеются в книге [1, с.152]; см. также [2; глава 1]), задача о геодезических на эллипсоиде в R^3 , решенная Якоби [3], и на многомерных квадриках (этот случай проанализирован Мозером [4] - [6]), а также их обобщения, исследованные автором в [7] - [10]. Представляется, что эта проблема имеет также самостоятельный геометрический интерес. Ряд задач, сходных по постановке с той, которая изучается здесь, рассмотрел Э. Картан в части 2 книги [11].

2. Пусть M - n-мерное риманово пространство с метрикой $ds^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$, $i,j,k,l,p,q \in N=\{1,2,...,n\}$ (эта и все другие метрики, которые дальше встречаются в тексте, считаются невырожденными). Тогда геодезический поток в M продолжается до гамильтонова потока g_h^t в кокасательном расслоении T*(M) с гамильтонианом

$$h(x,y) = \frac{1}{2} g^{ij} y_i y_j \,,\ y_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^i} \,,\ T(x,y) = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j \,,\ x = (x^i) \,,\ y = (y_i). \quad (1)$$

Канонические (гамильтоновы) уравнения этого потока имеют вид

$$\dot{x}^k = \frac{\partial h}{\partial y_k} = g^{ki} y_i \,,\ \dot{y}_k = -\frac{\partial h}{\partial x^k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} y_i y_j \,; \quad (2)$$

будем называть их уравнениями геодезических в гамильтоновой форме, а функции T(x,y) и h(x,y), следуя [12] - [16], - кинетической энергией.

Пусть $\hat{M}$ - другое n-мерное риманово пространство, снабженное тем же набором координатных систем $x=(x^i)$, что и M, и имеющее метрику $ds^2 = \gamma_{ij}(x)dx^i dx^j$. Тогда значение кинетической энергии в T*($\hat{M}$) есть

$$f(x,y) = \frac{1}{2} \gamma^{ij}(x) y_i y_j \,. \quad (3)$$

Задача A. Найти условия, при которых уравнения (2) имеют первый интеграл вида (3).

В исходной форме искомые условия выражаются через скобки Пуассона, определяемые равенством

$$\{f,h\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial h}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial h}{\partial x^i} \,. \quad (4)$$

Функция f(x,y) будет первым интегралом канонических уравнений с (произвольным, а не только вида (1)) гамильтонианом h(x,y) тогда и только тогда, когда

$$\{f,h\} = 0. \quad (5)$$

Проанализируем условие (5) для функций f(x,y) и h(x,y) ,определенных формулами (3) и (1) соответственно. Сначала докажем вспомогательное

Предложение 1. Если функции f(x,y) и h(x,y) заданы формулами (3) и (1), то

$$\{f,h\}=\frac{1}{2}g^{li}\nabla_l\gamma^{jk}y_iy_jy_k\ . \tag{6}$$

Доказательство. Используя (4), получаем

$$\{f,h\}=g^{il}y_i\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma^{jk}}{\partial x^l}y_jy_k-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l}y_iy_j\gamma^{kl}y_k=$$

$$=\frac{1}{2}(g^{li}(\nabla_l\gamma^{jk}-\Gamma^j_{pl}\gamma^{pk}-\Gamma^k_{pl}\gamma^{pj})-\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l}\gamma^{kl})y_iy_jy_k=$$

$$=\frac{1}{2}g^{li}\nabla_l\gamma^{jk}y_iy_jy_k-\frac{1}{2}(\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^l}+\Gamma^i_{lp}g^{pj}+\Gamma^j_{lp}g^{ip})\gamma^{kl}y_iy_jy_k=$$

$$=\frac{1}{2}g^{li}\nabla_l\gamma^{jk}y_iy_jy_k-\frac{1}{2}\nabla_lg^{ij}\gamma^{kl}y_iy_jy_k=\frac{1}{2}g^{li}\nabla_l\gamma^{jk}y_iy_jy_k.$$

Предложение 2. Для того, чтобы функция $f(x,y)$ вида (3) была первым интегралом уравнений (2), необходимо и достаточно, чтобы контравариантный метрический тензор γ^{ij} был решением уравнений

$$g^{l(i}\nabla_l\gamma^{jk)}=0. \tag{7}$$

Доказательство следует из формул (5), (6).

Замечание 1. Уравнения (7) есть переопределенная система линейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно γ^{ij}. Анализ условий ее разрешимости приводит к решению задачи А.

Следствием кососимметричности скобок Пуассона, $\{f,h\}=-\{h,f\}$, и равенства (6) является соотношение (оно может быть доказано также непосредственными вычислениями, не прибегая к формуле (6))

$$g^{l(i}\nabla_l\gamma^{jk)}=-\gamma^{l(i}\hat{\nabla}_lg^{jk)}\ , \tag{8}$$

где символом $\hat{\nabla}_l$ обозначена ковариантная производная в римановом пространстве $\hat{M}$. Следовательно, если выполнено (7), то из (8) и предложения 2 получаем

$$\gamma^{l(i}\hat{\nabla}_lg^{jk)}=0\ . \tag{9}$$

Это означает, что справедливо

Предложение 3. Если функция $f(x,y)$, заданная равенством (3), является первым интегралом уравнений геодезических (2) в римановом пространстве M, то функция $h(x,y)$, определенная формулой (1), есть первый интеграл уравнений геодезических в римановом пространстве с метрикой $ds^2=\gamma_{ij}(x)dx^idx^j$.

Таким образом, в классе всех римановых пространств одинаковой размерности с общими координатными системами возникает бинарное отношение между парами римановых пространств, определяемое тем, что их метрики связаны равносильными соотношениями (7) и (9). Оно рефлексивно и симметрично, но не транзитивно (последнее показывают конкретные примеры). Следовательно, это отношение не является отношением эквивалентности, поэтому соответствующие классы пересекаются. Поскольку функции $f(x,y)$ и $h(x,y)$, связанные равенством (5), в теории гамильтоновых систем и симплектической геометрии принято называть находящимися в инволюции ([12], [16]), то будем говорить, что римановы пространства M и $\hat{M}$ находятся в инволюции (а также, что $\hat{M}$ инволютивно к M), если они подчиняются указанному бинарному отношению.

Множество всех метрик, являющихся решениями уравнения (7), образует векторное пространство, поэтому можно говорить о линеале римановых пространств, инволютивных к данному пространству M (это корректно, впрочем, лишь с точки зрения локальной геометрии, так как в общем случае некоторые ненулевые линейные комбинации невырожденных метрик вырождаются в отдельных точках). Максимальный элемент этого линеала есть риманово пространство, метрикой которого является общее решение уравнения (7); назовем его полным пространством, инволютивным к M.

Задача B. Для данного риманова пространства M найти полное пространство, инволютивное к M.

Ниже эта задача будет решена для римановых пространств произвольной размерности с постоянной метрикой и для специального семейства двумерных пространств.

Замечание 2. Несколько задач, сходных по постановке с задачей B, рассмотрел Э. Картан [11; часть 2].

Решение задачи B является необходимым шагом к решению другой, более специальной и важной задачи. Чтобы ее сформулировать, дадим

Определение 1. Семейство римановых пространств $\{M_\alpha\}$ называется инволютивным, если каждая пара элементов этого семейства находится в инволюции. Каждое максимальное инволютивное семейство римановых пространств (т.е. не являющееся собственным подмножеством некоторого другого инволютивного семейства) называется полным инволютивным семейством.

Задача C. Определить полное инволютивное семейство римановых пространств, содержащих данное пространство M.

Замечание 3. С задачей C связано решение проблемы построения полного набора (по Лиувиллю) первых интегралов уравнений геодезических в гамильтоновой форме (2), проблемы их интегрирования, а также большого количества других задач теории интегрируемых гамильтоновых систем и их приложений.

3. Переходим к решению задачи B для случая, когда метрика риманова пространства M постоянная (другими словами, M есть либо евклидово, либо псевдоевклидово пространство). Тогда все коэффициенты связности Γ_{ij}^k обращаются в нуль и уравнения (7) приобретают вид

$$g^{l(i}\frac{\partial \gamma^{jk)}}{\partial x^{l}}=0\ . \qquad (10)$$

Для решения задачи B в случае постоянной метрики полезно ее обобщить следующим образом.

Задача D. Найти все первые интегралы F(x,y) (не обязательно сводящиеся к виду (3)) уравнений геодезических (2) в пространстве с постоянной метрикой.

Для решения задачи D вернемся к уравнению (5). Справедливо равенство

$$\{F,h\}=y^{i}\frac{\partial F}{\partial x^{i}}\ ,\ y^{i}\equiv g^{ij}y_{j}\ ,$$

поэтому функция F(x,y) является решением следующего линейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$y^{i}\frac{\partial F}{\partial x^{i}}=0 \qquad (11)$$

(величины y_j входят в уравнение (11) в качестве параметров).

Уравнение (11) решаем методом характеристик. Уравнения характеристик имеют вид

$$\sigma^{ij}\equiv y^{j}\,dx^{i}-x^{i}\,dy^{j}=0\ . \qquad (12)$$

Замечание 4. Формы σ^{ij} линейно зависимые, как следует из легко проверяемого тождества $g^{l(i}y_{l}\sigma^{jk)}=0$. Среди этих форм имеется в точности n-1 линейно независимых, в качестве которых можно выбрать формы σ^{li}, i=2,...,n, но для инвариантности формулировок результатов будут использованы все σ^{ij}.

Первыми интегралами характеристической системы (12) являются функции

$$\omega^{ij}=x^{i}y^{j}-x^{j}y^{i}\ .$$

Следовательно, справедливо

Предложение 4. Общее решение уравнения (11), а значит, и решение задачи D, даются формулой

$$F(x,y)=\varphi(\omega^{ij},y_{k})\ , \qquad (13)$$

где $\varphi=\varphi(z)$ -- произвольная дифференцируемая функция от $K=\dfrac{n(n+1)}{2}$ независимых переменных, $z\in R^{K}$.

Замечание 5. Из замечания 4 следует, что для каждого фиксированного первого интеграла F(x,y) выбор функции $\varphi(z)$ в представлении (13) неоднозначен: фактически все такие представления приводятся к виду $F(x,y)=\varphi_{0}(\omega^{li},y_{j})$ с единственной функцией $\varphi_{0}(z_{o})$ от 2n-1 независимых переменных, $z_{0}\in R^{2n-1}$, -- но для целей данной работы это существенного значения не имеет.

Предложение 5. Общий первый интеграл f(x,y) вида (3) уравнений геодезических (2) в римановом пространстве с постоянной метрикой дается выражением

$$f(x,y)=a_{ijkl}\omega^{ij}\omega^{kl}+b^k_{ij}\omega^{ij}y_k+c^{ij}y_iy_j\ , \qquad (14)$$

где $a_{ijkl}, b^k_{ij}, c^{ij}$ -- произвольные тензоры, постоянные в рассматриваемой системе координат и удовлетворяющие условиям

$$a_{ijkl}=a_{klij}=-a_{jikl}\ ,\ b^k_{ij}=-b^k_{ji}\ ,\ c^{ij}=c^{ji}\ . \qquad (15)$$

Доказательство. Любой первый интеграл f(x,y) вида (3) является однородной функцией степени 2 по переменным y_i . С другой стороны, как показывают несложные рассуждения, любая функция $\varphi(\omega^{ij},y_k)$,
однородная степени 2 по y_k , может быть записана в виде выражения в правой части формулы (14).

Формула (14) позволяет утверждать, что множество всех первых интегралов f(x,y) вида (3) для уравнений геодезических (2) в римановом пространстве с постоянной метрикой образует векторное пространство, являющееся линейной оболочкой интегралов $\omega^{ij}\omega^{kl},\omega^{ij}y_k,y_iy_k$, однако эта система образующих не является базисной, т.к. имеет место тождество $\omega^{ij}\omega^{kl}-\omega^{ik}\omega^{jl}+\omega^{il}\omega^{jk}=0.$ Анализ вопроса о базисе линеала всех первых интегралов вида (15) необходим для решения задачи С и решения прикладных задач, упомянутых в п.1, но здесь он не приводится с целью сокращения объема статьи. Ограничимся формулировкой результата.

Предложение 6. Если первый интеграл f(x,y) вида (3) является однородной функцией степени 2 как по переменным x^i, так и по переменным y_i (по отдельности), то он имеет представление

$$f(x,y)=g^{ip}g^{jq}\alpha_{pqkl}x^kx^ly_iy_j\ , \qquad (16)$$

где α_{pqkl} -- произвольный тензор, удовлетворяющий условиям

$$\alpha_{pqkl}=\alpha_{qpkl}=\alpha_{pqlk}\ ,\ \alpha_{pqkl}+\alpha_{pkql}+\alpha_{plqk}=0\ . \qquad (17)$$

Для доказательства нужно подставить (16) в (10).

Замечание 6. Число произвольных констант $\alpha_{pqkl}, b^k_{ij}, c^{ij}$,
удовлетворяющих условиям (15), (17), есть размерность линеала всех римановых пространств, инволютивных к пространству M с постоянной метрикой.

4. В случае общего положения для любой пары римановых пространств M и $\hat{M}$ существует координатная система x=(x^i), в которой их метрики одновременно диагональны,$g^{ij}=\gamma^{ij}=0$, $i\neq j$. Тогда система уравнений (7) приводится к следующей системе Пфаффа:

$$d\gamma^{ii}=\sum_k\frac{1}{g^{kk}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k}\gamma^{kk}dx^k\ ,\ dx^k\wedge dx^l\neq 0\ ,\ k\neq l\ \ ; \qquad (18)$$

здесь и далее отказываемся от соглашения о суммировании по повторяющимся индексам.

Замечание 7. Система Пфаффа (18) непротиворечива, так как она имеет следующее решение:

$$\gamma^{ii} = cg^{ii} , \tag{19}$$

где c -- произвольная константа.

Если метрики двух римановых пространств пропорциональны, то сами пространства подобны, а, значит, геодезические имеют одинаковую конфигурацию. Для целей данной работы этот случай бессодержателен, поэтому он исключается из рассмотрения. Аналогичная, но несколько более сложная ситуация возникает, если равенство (19) выполняется не для всех, но только для некоторого семейства индексов i, а c есть функция, не зависящая от координат с этими индексами. Тогда соответствующие подпространства подобны и интерес представляет лишь взаимная геометрия геодезических на дополнительных подпространствах. Анализ этой геометрии ничем не отличается от того, который дан ниже.

Определение 2. Инволюция римановых пространств M и $\hat{M}$ называется нетривиальной, если не существует индекса i такого, что выполнено равенство (19).

Предложение 7. Если римановы пространства M и $\hat{M}$ находятся в нетривиальной инволюции, то система Пфаффа (18) интегрируема по Фробениусу, а метрические коэффициенты g^{ii} являются решением следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$L^i_{kl} \equiv \frac{\partial^2 g^{ii}}{\partial x^k \partial x^l} - \frac{1}{g^{kk}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k} \frac{\partial g^{kk}}{\partial x^l} - \frac{1}{g^{ll}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^l} \frac{\partial g^{ll}}{\partial x^k} = 0 , \quad k \neq l . \tag{20}$$

Доказательство. Обычной процедурой получаем квадратичные уравнения чистого замыкания системы (18) (об определении этого понятия см. [17], [18]) в виде

$$\sum_{k,l} \left(\frac{\gamma^{ll}}{g^{ll}} - \frac{\gamma^{kk}}{g^{kk}} \right) L^i_{kl} dx^k \wedge dx^l = 0 .$$

В силу базисности форм $dx^k \wedge dx^l$ и антисимметрии коэффициентов при них получаем

$$\left(\frac{\gamma^{ll}}{g^{ll}} - \frac{\gamma^{kk}}{g^{kk}} \right) L^i_{kl} = 0 .$$

Допустим, что $\gamma^{ii} = c(x) g^{ii}$ для некоторого подсемейства $N_0 \subset N$ значений индекса i. Подставляя эти выражения в систему Пфаффа (18), получаем $dc(x) = \sum_{k \in N \setminus N_0} \frac{\gamma^{kk} - g^{kk}}{g^{ii} g^{kk}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k} dx^k$. Следовательно, $\frac{\partial c}{\partial x^i} = 0$, $i \in N_0$, а это противоречит условию доказываемого утверждения. Значит, имеет место (20). В свою очередь, это означает выполнение условия теоремы Фробениуса.

Замечание 8. В силу свойства взаимности (см. уравнение (9)) метрика $\hat{M}$ также подчиняется уравнению (20).

Система уравнений (20) переопределена, но может быть упрощена.

Предложение 8. Система (20) равносильна следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k} = a^{ik} g^{ii} g^{kk} \ , \ \ i \neq k \ , \\ &\frac{\partial a^{ik}}{\partial x^l} = g^{ll} a^{il} (a^{lk} - a^{ik}) \ , \ \ k \neq l \, , \ \ \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^i} = 0 \ . \end{aligned} \tag{21}$$

Доказательство. Пусть выполнены уравнения системы (20). Выделим из нее подсистему, для которой l=i. Тогда получим систему

$$\frac{\partial^2 g^{ii}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k}\left(\frac{1}{g^{ii}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^i} + \frac{1}{g^{kk}} \frac{\partial g^{kk}}{\partial x^i} \right) = 0 \ , \ \ i \neq k \ .$$

Эти уравнения могут быть записаны в виде $\dfrac{\partial}{\partial x^i}\left(\dfrac{1}{g^{ii} g^{kk}} \dfrac{\partial g^{ii}}{\partial x^k} \right) = 0$,откуда следует существование функций $a^{ik} = a^{ik}(x)$, таких что $\dfrac{\partial a^{ik}}{\partial x^i} = 0$, и выполнена первая группа уравнений (21), а также та часть второй, для которой k = l. Подставляя полученный результат в уравнения (20), получаем при $k \neq l$

$$\begin{aligned} L^i_{kl} &= \frac{\partial}{\partial x^l}(a^{ik} g^{ii} g^{kk}) - \frac{1}{g^{kk}} a^{ik} g^{ii} g^{kk} a^{kl} g^{kk} g^{ll} - \frac{1}{g^{ll}} a^{il} g^{ii} g^{ll} a^{lk} g^{ll} g^{kk} = \\ &= g^{ii} g^{kk} \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^l} + a^{ik} g^{kk} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^l} + a^{ik} g^{ii} \frac{\partial g^{kk}}{\partial x^l} - g^{ii} g^{kk} g^{ll} (a^{ik} a^{kl} + a^{il} a^{lk}) = \\ &= g^{ii} g^{kk} \frac{\partial a^{ik}}{\partial x^l} + g^{kk} a^{ik} a^{il} g^{ii} g^{ll} + g^{ii} a^{ik} a^{kl} g^{kk} g^{ll} - g^{ii} g^{kk} g^{ll} (a^{ik} a^{kl} + a^{il} a^{lk}) = \\ &= g^{ii} g^{kk} \left(\frac{\partial a^{ik}}{\partial x^l} + g^{ll} a^{il} (a^{ik} - a^{lk})\right) \ , \end{aligned}$$

откуда, после соответствующей переиндексации, получается вторая группа системы уравнений (21).

Обратно, пусть выполнены уравнения системы (21). Исключая из нее величины a^{ik} , получаем $a^{ik} = \dfrac{1}{g^{ii} g^{kk}} \dfrac{\partial g^{ii}}{\partial x^k}$, и далее

$$\frac{\partial a^{ik}}{\partial x^l} - g^{ll} a^{il} (a^{lk} - a^{ik}) = \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{1}{g^{ii} g^{kk}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^k}\right) - g^{ll} \frac{1}{g^{ii} g^{ll}} \frac{\partial g^{ii}}{\partial x^l} \left(\frac{1}{g^{ll} g^{kk}} \frac{\partial g^{ll}}{\partial x^k} - \right.$$

$$-\frac{1}{g^{ii}g^{kk}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{k}})=\frac{1}{g^{ii}g^{kk}}\frac{\partial^{2}g^{ii}}{\partial x^{k}\partial x^{l}}-\frac{1}{(g^{ii})^{2}g^{kk}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{k}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{l}}-\frac{1}{g^{ii}(g^{kk})^{2}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{k}}\frac{\partial g^{kk}}{\partial x^{l}}-$$

$$-\frac{1}{g^{ii}g^{kk}g^{ll}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{l}}\frac{\partial g^{ll}}{\partial x^{k}}+\frac{1}{(g^{ii})^{2}g^{kk}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{k}}\frac{\partial g^{ii}}{\partial x^{l}}=\frac{L^{i}_{kl}}{g^{ii}g^{kk}}\ ,$$

откуда следует справедливость системы (20).

Решение системы (21) существует и может быть получено в виде явных, но громоздких формул. Ограничимся в качестве примера двумерным случаем (n=2), тогда имеем следующую систему двух уравнений:

$$\frac{\partial g^{11}}{\partial x^{2}}=a^{12}(x^{2})g^{11}g^{22}\ ,\quad \frac{\partial g^{22}}{\partial x^{1}}=a^{21}(x^{1})g^{11}g^{22}\ . \tag{22}$$

Из нее получаем $\frac{\partial(a^{21}(x^{1})g^{11})}{\partial x^{2}}=\frac{\partial(a^{12}(x^{2})g^{22})}{\partial x^{1}}$. Следовательно, существует функция $\psi(x^1, x^2)$, такая, что

$$a^{21}(x^{1})g^{11}=-\frac{\partial\ln(\psi(x^{1},x^{2}))}{\partial x^{1}}\ ,\ a^{12}(x^{2})g^{22}=-\frac{\partial\ln(\psi(x^{1},x^{2}))}{\partial x^{2}}\ .$$

Подстановка этих равенств в уравнения (22) дает $\frac{\partial^{2}\psi(x^{1},x^{2})}{\partial x^{1}\partial x^{2}}=0$, откуда находим общее решение системы (22) в виде

$$g^{11}=b^{1}(x^{1})\rho\ ,\ g^{22}=b^{2}(x^{2})\rho\ ,\ \rho=(c^{1}(x^{1})-c^{2}(x^{2}))^{-1},$$

$$b^{1}(x^{1})=-\frac{1}{a^{21}(x^{1})}\frac{dc^{1}(x^{1})}{dx^{1}}\ ,\ b^{2}(x^{2})=\frac{1}{a^{12}(x^{2})}\frac{dc^{2}(x^{2})}{dx^{2}}\ . \tag{23}$$

Существование двух первых интегралов позволяет получить методом разделения переменных решение уравнений геодезических в обоих римановых пространствах.

Библиографический список

1. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.: ОНТИ, 1937.
2. Лихтенберг А.Дж., Либерман М.А. Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984. - 528 с.
3. Якоби К.Г. Лекции по динамике. М.; Л.: ОНТИ, 1936.
4. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. 1981. Т.36. Вып.5. С.109-151.
5. Moser J. Integrable Hamiltonian systems and spectral theory. Lezione Fermiane. Pisa, 1981. P.157-229.
6. Moser J. Geometry of quadrics and spectral theory. The Chern symposium. 1979. P. 147-188.
7. Zaitsev A.A. On one integrable systems family of interacting oscillators // Proceedings of the 8th International Workshop Nonlinear Equations & Dynamical Systems. Needs`92 / ed. V. Makhankov et al. Singapore: World Scientific, 1993. P.463-466.

8. Зайцев А.А. Теория конфокальных квадрик и интегрируемые гамильтоновы системы // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1993. Вып. 24. С. 57-64.

9. Зайцев А.А. Интегрируемые динамические системы в кокасательном расслоении над сферой // Там же, 1994. Вып. 25. С. 44-48.

10. Зайцев А.А. К теории натуральных гамильтоновых систем, интегрируемых в эллиптических координатах // Фундаментальные проблемы математики и механики. Математика. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1994. С. 205-207.

11. Картан Э. Внешние дифференциальные системы и их геометрические приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1962. 240 с.

12. Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная дифференциальная геометрия: Методы и приложения. М.: Наука, 1979. 760 с.

13. Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. 384 с.

14. Рашевский П.К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1967. 664 с.

15. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970. 412 с.

16. Фоменко А.Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. 416 с.

17. Малаховский В.С. Введение в теорию внешних форм: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1978. 84 с.

18. Малаховский В.С. Картана метод внешних форм // Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979. Т.2. С. 732-735.

A.A.Z a i t s e v

RIEMANN SPACES WITH THE COMMON SET OF FIRST INTEGRALS OF THE EQUATIONS OF GEODESICS

In the class of Riemann spaces with common coordinate systems the following relation R is introduced: $M, \hat{M} \in R$, if the metric of $\hat{M}$ is the first integral of the equations of geodesics in M. This relation is reflexive and symmetric, but is not transitive as well. M and $\hat{M}$ are called in the involution, if $M, \hat{M} \in R$. Some results are submitted as following.

Proposition 0. Geodesic flows in the involutive Riemann space are commute.

Proposition 2. For the involution of M and $\hat{M}$ it is necessary and sufficient that their metric coefficients g^{ij} and γ^{ij} satisfy the conditions (7).

Let for Riemann spaces M and $\hat{M}$ there exists a coordinate system (x^i) in which their metrics are simultaneously diagonal, $g^{ij}=\gamma^{ij}=0$, $i \neq j$. Then the equations (7) reduce to the Pfaffian system (18). Let us call the involution of Riemann spaces nontrivial, if their metrics are not proportional.

Proposition 7. Riemann spaces M and $\hat{M}$ are in the nontrivial involutuion if and only if, the Pfaffian system (18) is integrable by Frobenius; in this case the diagonal metric coefficients g^{ii} are the solutions of the partial differential equations (20).

One is notices that the solution of the system (20) exists and could be obtained in an explicit form; in the two-dimensional case it is defined by the formulas (23). Solutions of the equations of geodesics in Riemann spaces, being in the nontrivial involution, are obtained in quadratures by the separation of variables. The problem, considered in the article, has numerous applications in the theory of integrable systems, mechanics and theoretical physics.