УДК 514.75

О. О. Белова

(Российский государственный университет им. И. Канта, г. Калининград)

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ИНДУЦИРОВАННЫХ СВЯЗНОСТЕЙ ГРАССМАНОПОДОБНОГО МНОГООБРАЗИЯ ЦЕНТРИРОВАННЫХ ПЛОСКОСТЕЙ

В n-мерном проективном пространстве исследуется грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей размерности m. Осуществлен аналог сильной нормализации Нордена данного многообразия. Эта нормализация индуцирует связности 1-го и 2-го типов в расслоении, ассоциированном с многообразием $Gr^*(m,n)$. Эти связности геометрически интерпретируются при помощи центральных проектирований и параллельных перенесений.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_I\}$ $(I, \ldots = 1, \ldots, n)$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \theta A + \omega^I A_I, \; dA_I = \theta A_I + \omega_I^J A_J + \omega_I A,$$

причем формы Пфаффа $\omega^I, \omega_I, \omega_J^I$ удовлетворяют структурным уравнениям Картана проективной группы GP(n):

$$D\omega^I = \omega^J \wedge \omega_J^I, \; D\omega_I = \omega_I^J \wedge \omega_J,$$

$$D\omega_J^I = \omega_J^K \wedge \omega_K^I + \delta_J^I \omega_K \wedge \omega^K + \omega_J \wedge \omega^I.$$

В пространстве P_n рассмотрим грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных m-мерных плоскостей L_m^*.

При помещении вершин A, A_a на плоскость L_m^* и фиксации центра A (здесь и в дальнейшем индексы принимают значения: $a, \ldots = \overline{1, m}$; $\alpha, \ldots = \overline{m+1, n}$) уравнения грассманоподобного многообразия центрированных плоскостей будут выглядеть следующим образом:

$$\omega^a = \Lambda_\alpha^a \omega^\alpha + \Lambda_\alpha^{ab} \omega_b^\alpha,$$

где Λ_α^a, Λ_α^{ab} — некоторые функции. Грассманоподобное многообразие $Gr^*(m,n)$ центрированных плоскостей имеет размерность $\dim Gr^*(m,n) = (n - m)(m + 1)$.

Замечание. *Компоненты фундаментального объекта* $\Lambda = \{\Lambda_\alpha^a, \Lambda_\alpha^{ab}\}$ *удовлетворяют дифференциальным сравнениям по модулю базисных форм* ω^α, ω_a^α

$$\Delta\Lambda_\alpha^a + \Lambda_\alpha^{ab}\omega_b + \omega_\alpha^a \equiv 0, \ \Delta\Lambda_\alpha^{ab} \equiv 0.$$

Над многообразием $V^* = Gr^*(m,n)$ возникает главное расслоение $G^*(V^*)$, типовым слоем которого является подгруппа стационарности G^* центрированной плоскости L_m^*. В главном расслоении $G^*(V^*)$ задается фундаментально-групповая связность по Г. Ф. Лаптеву:

$$\tilde{\omega}_b^a = \omega_b^a - \Gamma_{b\alpha}^a \omega^\alpha - L_{b\alpha}^{ac}\omega_c^\alpha, \ \tilde{\omega}_\beta^\alpha = \omega_\beta^\alpha - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma - L_{\beta\gamma}^{\alpha a}\omega_a^\gamma,$$

$$\tilde{\omega}_\alpha^a = \omega_\alpha^a - \Gamma_{\alpha\beta}^a \omega^\beta - L_{\alpha\beta}^{ab}\omega_b^\beta,$$

$$\tilde{\omega}_a = \omega_a - L_{a\alpha}\omega^\alpha - \Pi_{a\alpha}^b \omega_b^\alpha, \ \tilde{\omega}_\alpha = \omega_\alpha - L_{\alpha\beta}\omega^\beta - \Pi_{\alpha\beta}^a \omega_a^\beta.$$

Согласно теореме Картана — Лаптева [1], связность в ассоциированном расслоении $G^*(V^*)$ определяется с помощью поля объекта связности [2]:

$$\Gamma = \{\Gamma_{b\alpha}^a, L_{b\alpha}^{ac}, \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha, L_{\beta\gamma}^{\alpha a}, \Gamma_{\alpha\beta}^a, L_{\alpha\beta}^{ab}, L_{a\alpha}, \Pi_{a\alpha}^b, L_{\alpha\beta}, \Pi_{\alpha\beta}^a\}$$

на базе V^*.

Осуществим аналог сильной нормализации Нордена [3] данного многообразия полями следующих геометрических образов: (n–m–1)-плоскостью P_{n-m-1}, не имеющей общих точек с плоскостью L^*_m, и (m–1)-плоскостью P_{m-1}, принадлежащей плоскости L^*_m и не проходящей через ее центр. Плоскость P_{n-m-1} зададим совокупностью точек $B_\alpha = A_\alpha + \lambda^a_\alpha A_a + \lambda_\alpha A$, а плоскость P_{m-1} — точками $B_a = A_a + \lambda_a A$.

Теорема 1. *Аналог сильной нормализации Нордена грассманоподобного многообразия* $Gr^*(m,n)$ *позволяет задать связности двух типов [2; 4] в ассоциированном расслоении.*

Находим дифференциалы базисных точек оснащающих плоскостей:

$$dB_\alpha = \theta B_\alpha + (\omega^\beta_\alpha + \lambda_\alpha\omega^\beta + \lambda^a_\alpha\omega^\beta_a)B_\beta + (\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a -$$
$$-\lambda_\alpha\lambda^a_\beta\omega^\beta - \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\omega^\beta_b)B_a + [\Delta\lambda_\alpha + \lambda^a_\alpha\omega_a + \omega_\alpha - \lambda_\alpha\lambda_\beta\omega^\beta - \lambda_\beta\lambda^a_\alpha\omega^\beta_a - \quad (1)$$
$$-(\Delta\lambda^a_\alpha + \omega^a_\alpha + \lambda_\alpha\omega^a - \lambda_\alpha\lambda^a_\beta\omega^\beta - \lambda_\alpha\lambda^a_\beta\omega^\beta - \lambda^a_\beta\lambda^b_\alpha\omega^\beta_b)\lambda_a]A;$$

$$dB_a = \theta B_a + (\omega^b_a + \lambda_a\omega^b + \lambda_a\lambda^b_\alpha\omega^\alpha + \lambda^b_\alpha\omega^\alpha_a)B_b +$$
$$+(\lambda_a\omega^\alpha + \omega^\alpha_a)B_\alpha + \quad (2)$$
$$+[\Delta\lambda_a - \lambda_a\lambda_b\omega^b + \omega_a + (\lambda_a\lambda_\alpha - \lambda_a\lambda_b\lambda^b_\alpha)\omega^\alpha + (\lambda_\alpha - \lambda_b\lambda^b_\alpha)\omega^\alpha_a]A.$$

Дадим геометрическую характеристику индуцированным связностям с помощью отображений.

Теорема 2. *Простой подобъект* $\overset{0}{\Gamma}_1 = \{\overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}\}$ *объектов связности* $\overset{01}{\Gamma}, \overset{02}{\Gamma}$ *[2; 4] характеризуется центральным проектированием плоскости* $P_{n-m-1} + dP_{n-m-1}$, *смежной с оснащающей плоскостью* P_{n-m-1}, *на исходную плоскость* P_{n-m-1}, *из центра — образующей плоскости* L^*_m

$$\overset{0}{\Gamma}_1:\ P_{n-m-1} + dP_{n-m-1} \xrightarrow{L^*_m} P_{n-m-1}. \quad (3)$$

Доказательство. Плоскость P_{n-m-1} задается системой точек B_α, дифференциалы (1) которых приводятся к виду:

$$dB_\alpha = \nu B_\alpha + \overset{0}{\omega}{}^\beta_\alpha B_\beta + \overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha A_a + \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha A\,, \tag{4}$$

где $\nu = \theta - (\Lambda^a_\alpha\lambda_a + \mu_\alpha)\omega^\alpha - \Lambda^{ba}_\alpha\lambda_b\omega^\alpha_a$, $\mu_\alpha = \lambda_\alpha - \lambda_a\lambda^a_\alpha$.

Проекция (3) плоскости $P_{n-m-1} + dP_{n-m-1}$, смежной с плоскостью P_{n-m-1}, на плоскость P_{n-m-1} из центра — плоскости L^*_m определяется формами связности $\overset{0}{\omega}{}^\beta_\alpha$, которые выражаются с помощью подобъекта $\overset{0}{\Gamma}_1$.

Теорема 3. *Оснащающую плоскость* P_{n-m-1} *в групповой связности 1-го типа* $\overset{01}{\Gamma}$ *переносить параллельно нельзя.*

Доказательство. Приравнивая нулю компоненты ковариантных дифференциалов $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha = 0, \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha = 0$ в (4), получим $dB_\alpha = \nu B_\alpha + \overset{0}{\omega}{}^\beta_\alpha B_\beta$, т. е. плоскость P_{n-m-1} остается на месте.

Теорема 4. *Плоскость* P_{n-m-1} *переносится параллельно в связности, определяемой подобъектом* $\overset{01}{\Gamma}_2 = \{\overset{0}{\Gamma}{}^a_{b\alpha}, \overset{0}{L}{}^{ab}_{c\alpha}, \overset{0}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\gamma}, \overset{0}{L}{}^{\alpha a}_{\beta\gamma}, \overset{01}{\Gamma}{}^a_{\alpha\beta}, \overset{01}{L}{}^{ab}_{\alpha\beta}\}$ *объекта связности* $\overset{01}{\Gamma}$, *тогда и только тогда, когда она смещается в плоскости* $P_{n-m} = [P_{n-m-1}, A]$, *являющейся аналогом нормали 1-го рода Нордена [3].*

Доказательство. Преобразуя дифференциалы (2) точек B_α, учитывая в них выражения точек B_a и охваты 1-го типа [2], получим

$$dB_\alpha = (\ldots)B_\beta + \overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha B_a + (\overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha - \lambda_a\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha)A. \tag{5}$$

Из выражений (5) видно, что обращение в нуль ковариантного дифференциала $\overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha$ характеризует рассматриваемый параллельный перенос в связности, определяемой подобъектом $\overset{01}{\Gamma}_2$ объекта связности $\overset{01}{\Gamma}$, при котором плоскость P_{n-m-1} смещается в плоскости P_{n-m}.

Теорема 5. *Плоскость* P_{n-m-1} *переносится параллельно в линейной комбинации [5] связности 1-го типа тогда и только тогда, когда она смещается в гиперплоскости* $P_{n-1} = P_{m-1} \oplus P_{n-m-1}$.

Доказательство. Из выражений (5) следует, что обращение в нуль линейной комбинации ковариантных дифференциалов $\overset{01}{\Omega}_\alpha = \overset{01}{\nabla}\lambda_\alpha - \lambda_a \overset{01}{\nabla}\lambda^a_\alpha$ характеризует рассматриваемый параллельный перенос в линейной комбинации связности, при котором плоскость P_{n-m-1} смещается в гиперплоскости P_{n-1}.

Список литературы

1. *Евтушик Л. Е., Лумисте Ю. Г., Остиану Н. М., Широков А. П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Пробл. геом. / ВИНИТИ. М., 1979. Т. 9.

2. *Белова О. О.* Связность в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Вестник ЧГПУ им. И. Я. Яковлева. Чебоксары, 2006. №5 (52). С. 18—20.

3. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

4. *Белова О. О.* Связность 2-го типа в расслоении, ассоциированном с грассманоподобным многообразием центрированных плоскостей // Диф. геом. многообр. фигур. Калининград: Изд-во РГУ им. И. Канта, 2007. №38. С. 6—12.

5. *Шевченко Ю. И.* Параллельный перенос фигуры в линейной комбинации связности // Диф. геом. многообр. фигур / Калинингр. ун-т. Калининград, 1987. №18. С. 115—120.

O. Belova

THE GEOMETRICAL CHARACTERISTIC FOR INDUCED CONNECTIONS OF GRASSMAN-LIKE MANIFOLD OF CENTRED PLANES

Grassman-like manifold $Gr^*(m, n)$ of centred m-planes is considered in the projective space P_n. Analog of Norden's normalization is made. This analog induces the connection of 1-st and 2-nd types in the fibering associated with the manifold $Gr^*(m, n)$.

Geometrical interpretation of the connections of two types in the fibering over the Grassman-like manifold of centred m-planes is given by means of mappings and parallel displacements.

УДК 514.75

С. Ю. Волкова

(Балтийский военно-морской институт им. Ф.Ф. Ушакова, г. Калининград)

ДВОЙСТВЕННЫЕ НОРМАЛЬНЫЕ СВЯЗНОСТИ S-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА

Продолжается изучение нормальных связностей, индуцируемых в расслоениях нормалей 1-го и 2-го рода базисного Λ-подрасслоения данного S-распределения [1—5], оснащенного в смысле Нордена — Картана [2] и Нордена — Бортолотти [5—7]. Выясняются аналитические и геометрические условия вырождения различных подгрупп этих связностей в одну связность.

Схема использования индексов такова:

$$J, K = \overline{1, n};\ \ \bar{J}, \bar{K} = \overline{0, n};\ \ p, q, t = \overline{1, r};$$

$$u, v, w = \overline{r+1, n-1};\quad \alpha = \overline{m+1, n-1};\quad \hat{u}, \hat{v} = \overline{r+1, m}.$$

В данной работе мы применяем обозначения и охваты геометрических объектов, построенных в работах [1—5]. Кроме