УДК 514.76

А. В. Букушева
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
bukusheva@list.ru

Нелинейные связности и внутренние полупульверизации на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой

На распределении с допустимой обобщенной лагранжевой метрикой и внутренней нелинейной связностью определяется продолженная почти контактная метрическая структура. Изучаются простейшие свойства продолженной почти контактной метрической структуры.

Ключевые слова: допустимая обобщенная лагранжева метрика, внутренняя нелинейная связность, внутренняя полупульверизация.

1. Введение. На распределении почти контактной метрической структуры продолженная структура изучалась в трудах [1—4]. В настоящей статье дается обобщение полученных в указанных статьях результатов на случай распределения с допустимой обобщенной лагранжевой метрикой и внутренней нелинейной связностью.

Работа устроена следующим образом. Во втором разделе анализируется внутренняя полупульверизация и нелинейная связность над распределением. Нелинейную связность над распределением иногда будем называть внутренней нелинейной связностью. В третьем разделе определяется продолженная почти контактная метрическая структура и исследуются ее свойства.

2. Нелинейные связности и внутренние полупульверизации.

Пусть D — распределение почти контактной метрической структуры $(D, \eta, D^{\perp}, \vec{\xi}, g)$. Будучи подмногообразием тотального пространства касательного расслоения, распределение D наследует многие из его дифференциально-геометрических свойств. В то же время возможности для аналогий ограничены по существу, так как в отличие от размерности TX размерность D — нечетна. В предлагаемой работе вводятся в рассмотрение аналоги структур, занимающих важное место в геометрии касательных расслоений.

Одной из самых известных структур, возникающих на касательном расслоении, является касательная структура J. В канонических координатах $(x^\alpha, x^{n+\beta})$ касательная структура получает следующее координатное представление: $J = \frac{\partial}{\partial x^{n+\alpha}} \otimes dx^\alpha$. Для определения аналога касательной структуры для контактного случая введем канонические координаты на распределении D.

Карту $K(x^\alpha)$ $(\alpha, \beta, \gamma = 1,..., n;\ a, b, c, e = 1,..., n-1)$ многообразия X будем называть адаптированной к распределению D, если $D^\perp = span\left(\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ [1]. Пусть $P\colon TX \to D$ — проектор, определяемый разложением $TX = D \oplus D^\perp$, и $K(x^\alpha)$ — адаптированная карта. Векторные поля $P(\partial_a) = \vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$ линейно независимы и в области определения соответствующей карты порождают систему D: $D = span(\vec{e}_a)$. Таким образом, мы имеем на многообразии X неголономное поле базисов $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_a, \partial_n)$ и соответствующее ему поле кобазисов $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a)$. Непосредственно проверяется, что $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = M_{ab}^n \partial_n$, где компоненты M_{ab}^n образуют так называемый тензор неголономности [2]. Если потребовать, чтобы во всех используемых адаптированных картах выполнялось равенство $\vec{\xi} = \partial_n$, то, в частности, окажется справедливым равенство $[\vec{e}_a, \vec{e}_b] = 2\omega_{ba}\partial_n$, где $\omega = d\eta$. Адаптированным будем называть также базис $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$, как базис, определяемый адаптированной картой. Заметим, что имеет место равенство $\partial_n \Gamma_a^n = 0$. Пусть $K(x^{\alpha})$ и $K(x^{\alpha'})$ — адаптированные карты, тогда при условии, что $\vec{\xi} = \partial_n$, получаем следующие формулы преобразования координат: $x^a = x^a(x^{a'})$, $x^n = x^{n'} + x^n(x^{a'})$.

Введем на D структуру гладкого многообразия, поставив в соответствие каждой адаптированной карте $K(x^{\alpha})$ на многообразии X сверхкарту $\tilde{K}(x^{\alpha}, x^{n+a})$ на многообразии D, где (x^{n+a}) — координаты допустимого вектора в базисе $\vec{e}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n$. Построенную сверхкарту будем называть канонической. Определим тензорное поле J типа (1, 1) на многообразии D, полагая, что в канонических координатах $J = \frac{\partial}{\partial x^{n+a}} \otimes dx^a$. Легко проверить, что определение поля J не зависит от выбора канонических координат. Как и в классическом случае, будем называть J касательной структурой. Будем называть векторное поле $\vec{S}$ внутренней полупульверизацией, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

1. Векторное поле $\vec{S}$ проецируемо и $\pi_* \vec{S} \in D$;
2. $J(\vec{S}) = \vec{C}$, где $\vec{C} = x^{n+a} \frac{\partial}{\partial x^{n+a}}$ — поле Лиувилля.

В канонических координатах $\vec{S} = x^{n+a} \frac{\partial}{\partial x^a} - 2G^b \frac{\partial}{\partial x^{n+b}}$.

Будем говорить, что над распределением D задана нелинейная связность, если распределение $\widetilde{D} = \pi_*^{-1}(D)$, где $\pi : D \to X$ — естественная проекция, разбивается в прямую сумму вида $\tilde{D} = HD \oplus VD$, где VD — вертикальное распределение на тотальном пространстве D.

Векторные поля $(\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}, \vec{u} = \partial_n, \partial_{n+a})$ определяют на D неголономное (адаптированное) поле базисов, а формы $(dx^a, \Theta^n = dx^n + \Gamma_a^n dx^a, \Theta^{n+a} = dx^{n+a} + G_b^a dx^b)$ — соответствующее поле кобазисов. Проводя необходимые вычисления, получаем следующие структурные уравнения:

$$\left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b\right] = 2\omega_{ba}\vec{u} + R_{ba}^c \partial_{n+c}, \ \left[\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}\right] = \partial_n G_a^c \partial_{n+c}. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Всякая нелинейная связность, заданная на распределении D, определяет внутреннюю полупульверизацию.*

Доказательство. Не трудно проверить, что векторное поле $\vec{S} = x^{n+a}\vec{\varepsilon}_a$ является полупульверизацией, если положить $G^b = \frac{1}{2} x^{n+a} G_a^b$.

Назовем внутреннюю полупульверизацию внутренней пульверизацией, если выполняется равенство $[\vec{C}, \vec{S}] = \vec{S}$.

Теорема 2. *Пусть* $\vec{S}$ *— внутренняя пульверизация, тогда векторные поля* $\vec{\varepsilon}_a = \partial_a - \Gamma_a^n \partial_n - G_a^b \partial_{n+b}$, *где* $G_a^b = \dfrac{\partial G^b}{\partial x^{n+a}}$ *определяют нелинейную связность, заданную на распределении D.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться теоремой Эйлера об однородных функциях и показать, что векторные поля $\vec{\varepsilon}_a$ линейно независимы в каждой точке и определяемое ими распределение трансверсально вертикальному распределению.

3. Продолженная почти контактная метрическая структура на распределении с обобщенной лагранжевой метрикой. Пусть (X, D, η) — почти контактная структура. Будем говорить, что распределение D является распределением с обобщенной лагранжевой метрикой, если на D как на гладком многообразии задан объект $g_{ab}(x, \dot{x}) = dx^a \otimes dx^b$, $\dot{x} \in D$, компоненты которого преобразуются при переходе к другой системе координат как компоненты тензора на базе.

Определим на распределении D как на гладком многообразии почти контактную метрическую структуру $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$, $\vec{u} = \partial_n$, полагая

$$G(\vec{\varepsilon}_a, \vec{\varepsilon}_b) = G(\partial_{n+a}, \partial_{n+b}) = g_{ab},$$

$$G(\vec{\varepsilon}_a, \partial_{n+b}) = G(\vec{\varepsilon}_a, \vec{u}) = G(\vec{u}, \partial_{n+b}) = 0,$$

$$G(\vec{u}, \vec{u}) = 1,\ J(\vec{\varepsilon}_a) = \partial_{n+a},\ J(\partial_{n+a}) = -\vec{\varepsilon}_a,\ J(\vec{u}) = 0.$$

Полученную структуру будем называть продолженной почти контактной метрической структурой.

Используя структурные уравнения (1), убеждаемся в справедливости следующей теоремы:

Теорема 3. *Почти контактная метрическая структура* $(\tilde{D}, J, \vec{u}, \lambda = \eta \circ \pi_*, G, D)$ *почти нормальна [2] тогда и только тогда, когда распределение D является распределением нулевой кривизны, т. е.* $R^c_{ba} = 0$.

Список литературы

1. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Почти контактные метрические структуры, определяемые связностью над распределением с допустимой финслеровой метрикой // Изв. Сарат. ун-та. Сер. : Математика. Механика. Информатика. 2012. Т. 12. Вып. 3. С. 17—22.
2. *Букушева А.В., Галаев С.В.* Связности над распределением и геодезические пульверизации // Изв. вузов. Матем. 2013. №4. С. 1—9.
3. *Галаев С.В.* Почти контактные кэлеровы многообразия постоянной голоморфной секционной кривизны // Там же. 2014. №8. С. 42—52.
4. *Букушева А.В.* Об инфинитезимальных изометриях продолженных почти контактных метрических структур. URL: http://web.snauka.ru/issues/2015/05/53589 (дата обращения: 25.06.2015).

A. Bukusheva

Nonlinear connections and intrinsic semispray on distribution with generalized Lagrangian metric

Extended almost contact metric structure is determined on distribution with admissible generalized Lagrangian metric and interior nonlinear connection. We study the simplest properties of extended almost contact metric structure.