



В. Е. Захаров, Е. Н. Годованая

**САМОСОГЛАСОВАННЫЙ РАСЧЕТ ЛУЧЕВЫХ ТРАЕКТОРИЙ,
ПОГЛОЩЕНИЯ И НЕОДНОРОДНОЙ СТРУКТУРЫ ВОЛН**

Исследовано влияние поглощения на формирование лучевых траекторий и неоднородность структуры распространяющихся волн. Проведены численные расчеты лучевых траекторий.

The effect of absorption on the formation of ray trajectories and heterogeneity of the structure of propagating waves is studied. Numerical calculations of the ray trajectories are performed.

Ключевые слова: характеристическая система в декартовых координатах, набег фазы, коэффициент интегрального поглощения.

Key words: characteristic system in Cartesian coordinates, the phase shift, the coefficient of total absorption.

Введение

В [1] получена характеристическая система для уравнений комплексной геометрической оптики с вещественными лучевыми траекториями. Цель работы — исследование влияния поглощения на формирование лучевых траекторий и неоднородность структуры распространяющихся волн. Эффекты анизотропии среды и дисперсии волн не учитываются.

Расчет лучевых траекторий и коэффициента интегрального поглощения

Введем декартовые координаты x и z . Среда распространения волн задана моделью ограниченного параболического слоя с комплексным показателем преломления:

$$n = n_1 + jn_2 \tag{1}$$

причем

$$\begin{aligned} n_1^2(z) &= b - (b - \varepsilon_{m1})[1 - (1 - z/z_m)^2], & 0 \leq z \leq 2z_m, \\ n_1^2(z) &= b, & z < 0, z \geq 2z_m, \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} n_2^2(z) &= a + (\varepsilon_{m2} - a)[1 - (1 - z/z_m)^2], & 0 \leq z \leq 2z_m, \\ n_2^2(z) &= a, & z < 0, z \geq 2z_m. \end{aligned}$$

где $a, b, z_m, \varepsilon_{m1}$ и ε_{m2} — параметры слоя.

Введем вектор комплексного импульса p с декартовыми проекциями $p = p_{x1} + jp_{x2}$ и $p = vp_{z1} + jp_{z2}$, а также комплексную функцию эйконала $\psi = \psi_1 + j\psi_2$.

Характеристическая система из [1] в декартовых координатах (x, z) имеет вид:

$$\frac{dx}{d\tau} = p_{x1} \left(1 + \left(\frac{p_{x2}}{p_{x1}} \right)^2 \right), \tag{2}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = p_{z1} \left(1 + \left(\frac{p_{z2}}{p_{z1}} \right)^2 \right), \tag{3}$$

$$\frac{dp_{x1}}{d\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (n_1^2 - n_2^2)}{\partial x} + \frac{p_{x2}}{p_{x1}} \cdot \frac{\partial (n_1 n_2)}{\partial x}, \tag{4}$$

$$\frac{dp_{z1}}{d\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial (n_1^2 - n_2^2)}{\partial z} + \frac{p_{z2}}{p_{z1}} \cdot \frac{\partial (n_1 n_2)}{\partial z}, \tag{5}$$



$$\frac{dp_{x_2}}{d\tau} = \frac{\partial n_1 n_2}{\partial x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} \cdot \frac{\partial (n_1^2 - n_2^2)}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\frac{dp_{z_2}}{d\tau} = \frac{\partial n_1 n_2}{\partial z} - \frac{1}{2} \cdot \frac{p_{z_2}}{p_{z_1}} \cdot \frac{\partial (n_1^2 - n_2^2)}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\frac{d\psi_1}{d\tau} = p_{x_1}^2 + p_{x_2}^2 + p_{z_1}^2 + p_{z_2}^2, \quad (8)$$

$$\frac{d\psi_2}{d\tau} = p_{x_1} p_{x_2} \left(1 + \left(\frac{p_{x_2}}{p_{x_1}} \right)^2 \right) + p_{z_1} p_{z_2} \left(1 + \left(\frac{p_{z_2}}{p_{z_1}} \right)^2 \right). \quad (9)$$

Проинтегрируем уравнения (2–9), применив модель слоя (1). Обозначим x_0, z_0 – координаты точечного источника, $(p_{x_1})_0, (p_{x_2})_0, (p_{z_1})_0, (p_{z_2})_0$ – начальные значения импульса выделенного луча. Интегрирование (4) и (6) уравнений дает:

$$p_{x_1} = (p_{x_1})_0, p_{x_2} = (p_{x_2})_0. \quad (10)$$

Вместо (5) и (7) уравнений удобнее применить уравнение:

$$p^2 = n^2 \quad (11)$$

являющееся следствием уравнения эйконала $H(\mathbf{p}, \mathbf{r}) = (1/2)(p^2 - n^2(\mathbf{r}))$, где H – гамильтониан системы, \mathbf{r} – радиус-вектор точки наблюдения.

С учетом (10) комплексное уравнение (11) дает уравнения

$$p_{z_1}^2 - p_{z_2}^2 = n_1^2 - n_2^2 - [p_{x_1}^2_0 - p_{x_2}^2_0], \quad (12)$$

$$p_{z_1} p_{z_2} = n_1 n_2 - p_{x_1}_0 p_{x_2}_0. \quad (13)$$

Решая уравнения (12), (13) выразим

$$p_{z_1}^2 = \frac{1}{2} \cdot \{ n_1^2 - n_2^2 - [p_{x_1}^2_0 - p_{x_2}^2_0] \} + \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \{ n_1^2 - n_2^2 - [p_{x_1}^2_0 - p_{x_2}^2_0] \}^2 + (n_1 n_2 - p_{x_1}_0 p_{x_2}_0)^2}. \quad (14)$$

Пусть $z_0 < 0$ и выделенный луч падает на ограниченный параболический слой снизу. Возможны два случая. В первом случае луч отражается от слоя в точке, где

$$p_{z_1}^2 = 0. \quad (15)$$

Подставив (14) в (15), получим уравнения, которые должны выполняться в точке отражения $\{x_{\text{пр}}, z_{\text{пр}}\}$ луча:

$$n_1 n_2 - (p_{x_1})_0 (p_{x_2})_0 = 0, n_1^2 - n_2^2 - [(p_{x_1}^2)_0 - (p_{x_2}^2)_0] \leq 0. \quad (16)$$

Во втором случае при распространении волнового возмущения вдоль луча выполнение условий (16) не достигается, и луч распространяется через слой без отражения.

Уравнение (2) разделим на (3), с учетом (10) найдем:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{(p_{x_1})_0 (p_{z_1})^2 ((p_{x_1})_0^2 + (p_{x_2})_0^2)}{(p_{x_1})_0^2 p_{z_1} ((p_{z_1})^2 + (p_{z_2})^2)}. \quad (17)$$

Выразим проекцию p_{x_2} из уравнения (13) и подставим в (17). Полученное уравнение интегрируется в квадратурах методом разделения переменных. В первом случае

$$x = x_0 + (p_{x_1})_0 \left(1 + ((p_{x_2})_0 / (p_{x_1})_0)^2 \right) \left(\int_{z_0}^{z_{\text{пр}}} \frac{dz}{\sqrt{p_{z_1}^4 + (n_1 n_2 - (p_{x_1})_0 (p_{x_2})_0)^2}} \right) \times \frac{p_{z_1}^4}{p_{z_1}^4 + (n_1 n_2 - (p_{x_1})_0 (p_{x_2})_0)^2}, \quad (18)$$



где нижний знак берется, если конечная точка интегрирования расположена после точки отражения на выделенном луче, а нижний знак — до точки поворота.

Согласно (18), траектория каждого отраженного луча формируется как зеркальное отражение траектории соответствующего падающего луча относительно прямой $x = x_n$. Во втором случае в (18) интегрирование проводится от начального значения z_0 до конечного z .

В нулевом приближении геометрической оптики напряженность электрического поля гармонической волны

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) e^{j k_0 \psi(\mathbf{r}) - \omega t} = \mathbf{E}_m(\mathbf{r}) e^{-k_0 \psi_2(\mathbf{r})} e^{j k_0 \psi_1(\mathbf{r}) - \omega t}, \quad (19)$$

где $\mathbf{E}_m(\mathbf{r})$ — комплексная амплитуда колебаний, ω — частота колебаний, k_0 — волновое число, $k_0 = \omega/c$, и c — скорость света.

С помощью (2–10) выразим элемент длины вдоль выделенного луча:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2)}. \quad (20)$$

С учетом двух последних уравнений системы (2) и (12) найдем набег фазы и коэффициент интегрального поглощения на участке выделенной лучевой траектории длины s :

$$k_0 \psi_1(s) = k_0 \int_0^s \frac{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 + (p_{x2}^2 \lambda_0^2 + p_{z1}^2 + p_{z2}^2))}{\sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2}} ds, \quad (21)$$

$$k_0 \psi_2(s) = k_0 \int_0^s \frac{(p_{x1} \lambda_0 (p_{x2} \lambda_0 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2)))}{\sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2}} ds + k_0 \int_0^s \frac{p_{z1} p_{z2} (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2)}{\sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2}} ds. \quad (22)$$

Из уравнений (2), (3) и (20) выразим проекции единичного вектора, касательного к выделенному лучу и указывающего направление распространения энергии волны

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(p_{x1} \lambda_0 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2))}{\sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2}}, \quad (23)$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{p_{z1} (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2)}{\sqrt{(p_{x1}^2 \lambda_0^2 (1 + ((p_{x2} \lambda_0 / (p_{x1} \lambda_0))^2) + p_{z1}^2 (1 + (p_{z2} / p_{z1})^2))^2}}. \quad (24)$$

Комплексный импульс представим в виде $\mathbf{p} = p \mathbf{l}$, где p — комплексная величина импульса, \mathbf{l} — единичный вектор нормали к фазовому фронту волны, где $\mathbf{l}^2 = 1$, так что $p = n$.

Для неоднородной волны вектор нормали \mathbf{l} — комплексный, а для однородной волны — вещественный.

Однородная волна — частный случай неоднородной волны, когда $(p_{x2} / p_{x1} = p_{z2} / p_{z1})$.

Фазовый фронт однородной волны, в отличие от неоднородной волны, распространяется в том же направлении, что и лучевой фронт.

Результаты численных расчетов

На рисунках 1 и 2 представлены некоторые из результатов численных расчетов. Пусть точечный источник излучает однородные гармонические волны. Координаты источника — $x_0 = 0$, $z_0 = -1$. Начальные значения проекций импульса

$$(p_x)_0 = n(x_0, z_0) \cos \varphi_0, \quad (p_z)_0 = n(x_0, z_0) \sin \varphi_0,$$

где φ_0 — начальное значение угла падения выделенного луча на слой.

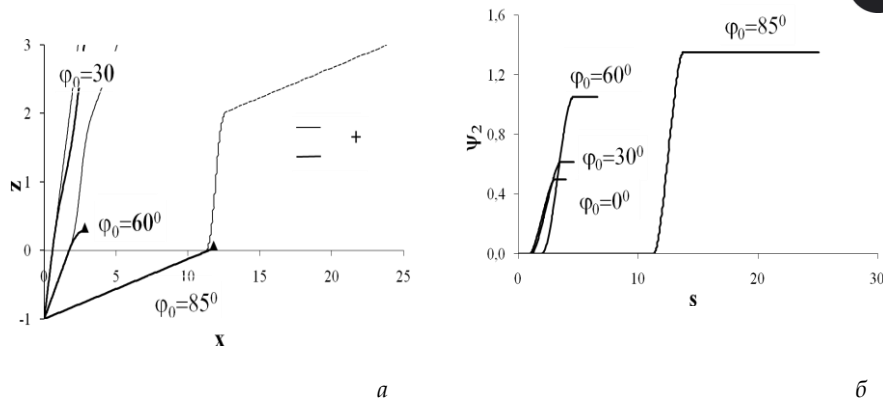


Рис. 1. Результаты численных расчетов:

a – лучевые траектории, сплошные линии – без учета поглощения ($n_2 = 0, b = 1, \epsilon_{m1} = 0,5$), пунктирные линии – с учетом поглощения ($a = 10^{-15}, \epsilon_{m2} = 0,1, b = 1, \epsilon_{m1} = 0,5$), точки отражения лучей, падающих на слой, помечены треугольным маркером, знак «+» указывает на наличие поглощения, а знак «-» – на его отсутствие;
б – мнимая часть эйконала для лучей (пунктирные линии, случай *a*)

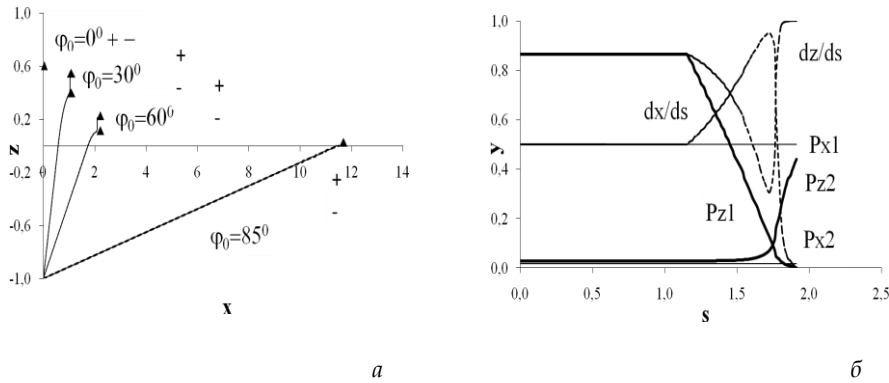


Рис. 2. Результаты численных расчетов:

a – то же, что и в случае на рисунке 1, *a*, но для слоя с параметрами $n_2 = 0, b = 1, \epsilon_{m1} = -0,2$ – сплошные линии, $a = 0,001, \epsilon_{m2} = 0,0011, b = 1, \epsilon_{m1} = -0,2$ – пунктирные линии; *б* – проекции лучевого вектора и вектора импульса для луча (пунктирная линия, случай $\theta, \phi_0 = 30^\circ$)

Выводы

С ростом поглощения и неизменной вещественной части показателя преломления усиливается проникновение наклонно падающих лучей в ограниченный слой (см. рис. 1, *a*). При этом отражение луча от слоя может даже смениться на прохождение луча через слой. Формирование интегрального поглощения в слое вдоль разных лучей иллюстрирует рисунок 1, *б*.

Исключение составляет случай нормального падения лучей на ограниченный слой. Отражение луча происходит при том же значении $z = z_{\Gamma}$ как при наличии, так и в отсутствие поглощения при прочих равных условиях (см. рис. 1, *a*). Выводы 1) и 2) подтверждаются анализом системы уравнений (12), (13).

Усиление неоднородности ограниченного слоя (при переходе от рис. 1, *a* к рис. 2, *a*) способствует возникновению отражения лучей в слое.

Однородная волна остается однородной при распространении в непоглощающем слое. В точке отражения обращаются в нуль вертикальные проекции и вектора импульса, и вектора, касательного к лучу. Последнее следует из анализа (15), (23) и (24). Другими словами, в точке отражения происходит поворот как фазового, так и лучевого фронта волны.

По мере проникновения в поглощающий ограниченный слой усиливается неоднородность волны (см. рис. 2, *б*). В точке отражения достигается полное внутреннее отражение падающей волны. Здесь вектор импульса наклонно падающей волны направлен вдоль оси x , а касательный к лучу вектор – вдоль оси z . Компенсация потока энергии падающей волны вверх достигается при образовании отраженной волны (см. (23), (24)).



Список литературы

1. Захаров В.Е. Развитие метода комплексной геометрической оптики на случай вещественных лучевых траекторий // Региональная XIV конференция по распространению радиоволн: тез. докл. СПб., 2009.

Об авторах

В. Е. Захаров – д-р физ.-мат. наук, проф., РГУ им. И. Канта.
Е. Н. Годованая – студ., РГУ им. И. Канта.

Authors

V. Zakharov – Prof., IKSUR.
E. Godovanaja – student, IKSUR.