O.S. R u m y a n t s e v a

COMPOSITIONAL EQUIPMENT OF STRIP DISTRIBUTION
IN THE PROJECTIVE SPACE

In the projective space we consider strip distribution S, that is n-dimensional triples (X,L_r,L_m) manifold, where X - point, L_r,L_m - planes, $X\in L_r\subset L_m$. Principle bundle, typical fibre of which is stationarity of triple (X,L_r,L_m) subgroup, appears over the distribution S. Compositional equipment of the distribution S consists of three plane fields: $P_{r-1}(X\in P_{r-1}\subset L_r)$, $P_{m-r-1}(P_{m-r-1}\subset L_m,\ P_{m-r-1}\cap L_r=\varnothing)$, $P_{n-m-1}\ (P_{n-m-1}\cap L_m=\varnothing)$. It is proved, the compositional equipment of the strip distribution S induces group connection in the associated bundle.

УДК 514.76

М.В. С м о л ь н и к о в а

(*Владимирский государственный педагогический университет*)

СОБСТВЕННОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКОГО ТЕНЗОРНОГО ПОЛЯ

§1. Введение и основные результаты

Пусть φ – симметрическое тензорное поле на римановом многообразии (M,g). Для любой точки $x\in M$ обозначим через $V_{\lambda(x)}(x)\subset T_xM$ собственное подпространство соответствующего симметрического оператора Φ_x с собственным значением $\lambda(x)$.

Обозначим через M_φ открытое всюду плотное подмножество в M, состоящее из точек, в которых число различных собственных значений оператора Φ постоянно. Тогда на каждой связной компоненте множества M_φ собственные значения оператора Φ определяют попарно различные собственные функции и каждая такая функция $\lambda=\lambda(x)$ определяет гладкое распределение $V_\lambda\colon x\to V_{\lambda(x)}(x)$ собственных подпространств оператора Φ.

Если φ - тензор Кодацци, т.е. $(\nabla_X\varphi)(Y,Z)=(\nabla_Y\varphi)(X,Z)$ для всех $X,Y,Z\in C^\infty TM$, то хорошо известен результат [1], согласно которому собственное распределение V_λ интегрируемо с вполне омбилическими интегральными многообразиями, причем вдоль каждого функция $\lambda=\lambda(x)$ -постоянна.

В литературе [2], [3] изучается геодезическое тензорное поле φ, для которого

$$(\nabla_X\varphi)(Y,Z)+(\nabla_Y\varphi)(Z,X)+(\nabla_Z\varphi)(X,Y)=\theta(X)\,\varphi(Y,Z)+\theta(Y)\varphi(Z,X)+\theta(Z)\varphi(X,Y) \qquad (1)$$

при всех $X,Y,Z\in C^\infty TM$ и некоторой $\theta\in C^\infty T^*M$. Для $\theta\equiv 0$ поле φ называется киллинговым [4]. Доказаны две теоремы.

Теорема 1. *Пусть φ - симметрическое тензорное поле на римановом многообразии (M,g), а $\lambda=\lambda(x)$ – его собственная функция, определенная на связной компоненте множества $M_\varphi\subset M$. Тогда (1) для геодезического и, в частности, киллингова тензорного поля φ его собственное распределение V_λ - омбилическое; (2) для киллингова тензорного поля φ функция $\lambda=\lambda(x)$ постоянна вдоль интегральных кривых распределения V_λ.*

Теорема 2. *Пусть компактное риманово многообразие (M,g) несет геодезическое тензорное поле φ, имеющее ровно две различные собственные функции λ и μ на связной компоненте множества $M_\varphi\subset M$. Если в каждой точке $x\in M$ тензор римановой кривизны R удовлетворяет условию $R(X,Y,X,Y)\leq 0$ для произвольных $X\in V_{\lambda(x)}(x)$ и $Y\in V_{\mu(x)}(x)$, то при $\dim V_\lambda=\dim V_\mu>1$ (1) собственные распределения V_λ и V_μ - интегрируемые с вполне геодезическими интегральными многообразиями; (2) функции λ и μ постоянны вдоль интегральных многообразий V_λ и V_μ соответственно.*

§2. Доказательство теоремы 1

Пусть R - поле ортонормированных реперов $R_x=\{x,e_1,\dots,e_n\}$ в области $U\subset M$ и $\varphi_{ij}=\varphi(e_i,e_j)$ для $i,j,k,l=1,\dots,n=\dim M$. Обозначим через $\{\omega^i_j\}$ и $\{\omega^i\}$ компоненты формы связности Леви-Чевита и сопряженного к R поля кореперов R*. Компоненты формы ω^i_j удовлетворяют условию $\omega^i_j=-\omega^j_i$.

Пусть $\nabla_k=\nabla_{e_k}$ и $\nabla_k\varphi_{ij}=\varphi_{ijk}$, тогда

$$\varphi_{ijk}=e_k(\varphi_{ij})-\varphi_{lj}\omega^l_i(e_k)-\varphi_{il}\omega^l_j(e_k), \tag{2}$$

где согласно (1) компоненты φ_{ijk} удовлетворяют условию

$$\varphi_{ijk}+\varphi_{jki}+\varphi_{kij}=\theta_k\varphi_{ij}+\theta_i\varphi_{jk}+\theta_j\varphi_{ki} \tag{3}$$

для $\theta_k=\theta(e_k)$.

Полагаем $M_\varphi\subset U$, тогда в каждой точке $x\in M_\varphi$ репер R_x можно специализировать таким образом, чтобы векторы $\vec{e}_t\in V_{\lambda(x)}(x)$ для всех $t,s=1,\dots,r$. В таком репере компоненты φ будут иметь вид:

$$\varphi_{st}=\lambda\delta_{st},\ \varphi_{sa}=\varphi_{as}=0 \tag{4}$$

для $a,b,c=r+1,\dots,n$. Подставляя в (2), получим

$$\varphi_{stk}=e_k(\lambda)\delta_{st}\ , \tag{5}$$

$$\varphi_{sak}=-\varphi_{ab}\omega^b_s(e_k)-\lambda\omega^s_a(e_k)\,. \tag{6}$$

Полагая $\lambda_k=e_k(\lambda)$, равенство (5) представим в виде:

$$\varphi_{stk}=\lambda_k\delta_{st}\,. \tag{7}$$

В свою очередь, из (6) выводим уравнения распределения V_λ [5]

$$\omega^a_s=\left(\Lambda^{ab}\varphi_{bst}\right)\omega^t+\left(\Lambda^{ab}\varphi_{bsc}\right)\omega^c \tag{8}$$

для $\left(\Lambda^{ab}\right)=\left(\lambda\delta_{ab}-\varphi_{ab}\right)^{-1}$.

Найдем компоненты второй фундаментальной формы или, по другой терминологии, асимптотического тензора распределения V_λ [5] , [6]:

$$Q^a_{st} = \frac{1}{2}\Lambda^{ab}\left(\varphi_{bst} + \varphi_{bts}\right),$$

где согласно (3), (4) и (7) будем иметь

$$\varphi_{bst} + \varphi_{bts} = -\varphi_{stb} + \theta_b\varphi_{st} = -\lambda_b\delta_{st} + \lambda\theta_b\delta_{st} = \left(\lambda\theta_b - \lambda_b\right)\delta_{st}.$$

В результате приходим к выражениям вида :

$$Q^a_{st} = \Lambda^a\delta_{st} \tag{9}$$

для $\Lambda^a = \frac{1}{2}\Lambda^{ab}\left(\lambda\theta_b - \lambda_b\right)$. Равенства (9) означают, что распределение V_λ омбилическое [6]. Такое распределение, как и любое омбилическое подмногообразие *(M,g)*, не имеет асимптотических направлений [5].

Если предположить, что φ- киллингово, то из равенств (3) и (5) при $\theta_k=0$ выводим: $e_s(\lambda)=0$.

§3. Доказательство теоремы 2

Рассмотрим теперь геодезическое тензорное поле φ, имеющее ровно две собственные функции λ и μ и при этом $dimV_\lambda=dimV_\mu>1$. В этом случае на *(M,g)* будут заданы два ортогональных дополнительной размерности омбилических распределения. Согласно [7] условие $R(X,Y,X,Y)\le 0$ для $X\in V_\lambda$ и $Y\in V_\mu$ накладываемое на тензор римановой кривизны компактного ориентированного риманова многообразия *(M,g)* с парой таких распределений V_λ и V_μ означает, что оба они – интегрируемые с вполне геодезическими интегральными многообразиями. В результате из (8) и аналогичного им уравнения распределения следует $\varphi_{bst} = 0$ *и* $\varphi_{sbc} = 0$. В этом случае из (5) и аналогичных им уравнений для μ следует $e_s(\lambda)=0$ и $e_a(\mu)=0$. Это и доказывает теорему 2.

Библиографический список

1. *Derdzinski A.* Some remarks on the local structure of Codazzi tensors // Lect. Notes Math. 1981. N 838. P.251-255.

2. *HanganT.* On totally geodesic distributions of planes // Top. Differ. Geom.: Colloq. Debrecen, 1988. Vol. 1. P. 519-530.

3. *Шапиро Я.Л.* О некоторых полях геодезических конусов // ДАН СССР. 1943. Т.39. №1. С. 6-10.

4. *Gerald H. Katzin, Jack Levine.* Quadratic first integrals of the geodesics in space of constant curvature // Tesor. 1965. Vol. 16. N. 2. P. 97-104.

5. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геом. семинара / ВИНИТИ.М., 1973. Т.4. С. 71-120.

6. *Reinhart B.L.* Differential geometry of foliations. Berlin – New York: Springer Verlag, 1983.

7. *Stepanov S.E.* An integral formula for a Rimannian almost-product manifold // Tensor. 1994. Vol. 55. N. 3. P. 209-214.

M.V. S m o l n i k o v a

OWN DISTRIBUTION OF GEODESIC TENSOR FIELD

Let φ - symmetrical tensor field on a Riemannian manifold (M,g) and $V_{\lambda(x)}(x)\subset T_xM$ - own subspace of the applicable symmetrical operator Φ_x with an eigenvalue $\lambda(x)$ for any point $x\in M$. If M_φ - opened everywhere dense subset in M, consisting from points, in which one number of different eigenvalues of the operator Φ constantly, then on each linked component of set M_φ the eigenvalues of the operator Φ determine mutually different eigenfunctions and each such function $\lambda=\lambda(x)$ determines smooth distribution V_λ: $x\to V_{\lambda(x)}(x)$ of own subspaces of the operator Φ. If φ - Codazzi tensor, i.e. $(\nabla_X\varphi)(Y,Z)=(\nabla_Y\varphi)(X,Z)$ for all $X,Y,Z\in C^\infty TM$, then it is well-known result [1], according to which one own distribution V_λ is integrated with quite umbilical integral manifolds, and along every function $\lambda=\lambda(x)$ is constant. In the literature [2], [3] is studied the geodesic tensor field φ, for which one

$$(\nabla_X\varphi)(Y,Z)+(\nabla_Y\varphi)(Z,X)+(\nabla_Z\varphi)(X,Y)=\theta(X)\varphi(Y,Z)+\theta(Y)\varphi(Z,X)+\theta(Z)\varphi(X,Y)$$

for some $\theta\in C^\infty T^*M$. For $\theta\equiv 0$ field φ is called Killing field [4]. We will prove two theorems of own distribution for geodesic and, in particular, for Killing tensor field.

УДК 517.77

С.Е. С т е п а н о в

(*Владимирский государственный педагогический университет*)

ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ ПРОСТРАНСТВ КОНФОРМНО-КИЛЛИНГОВЫХ ФОРМ

Доказывается, что на n-мерном римановом многообразии (M, g) пространства конформно-киллинговых p-форм и (n – p)-форм изоморфны.

§ 1. Основные определения и результаты

1.1. Рассмотрим расслоение Λ^pM дифференциальных p-форм над n-мерным римановым многообразием (M, g). Форма $\omega\in\Lambda^pM$ называется *гармонической*, если $\omega\in ker\,d\cap ker\,d^*$ для операторов внешнего дифференцирования $d:\Lambda^pM\to\Lambda^{p+1}M$, кодифференцирования $d^*=-*\circ d\circ *:\Lambda^pM\to\Lambda^{p-1}M$ и Ходжа $*:\Lambda^pM\to\Lambda^{n-p}M$.

Если обозначить через $\boldsymbol{H}^p(M,\mathbf{R})$ векторное пространство гармонических p-форм, а через $b_p = dim\,\boldsymbol{H}^p(M,\mathbf{R})$ – p-ое число Бетти, то имеют место изомор-