ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 10 1979

УДК 513.73

В.С. Малаховский

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ КОНГРУЭНЦИЙ КВАДРИК

В трехмерном проективном пространстве P_3 рассматривается конгруэнция $\mathcal{L}$ невырожденных линейчатых квадрик Q, у которой существуют четыре фокальные поверхности (A_α) $(\alpha, \beta, \gamma = 0,1,2,3)$, описанные вершинами автополярных тензоров третьего рода квадрик $Q \in \mathcal{L}$, причем прямые $A_0 A_i$ $(i, j, k = 1,2)$ являются асимптотическими касательными поверхности (A_0) и линии, огибаемые на невырождающихся поверхностях (A_0) и (A_3) пересекающимися прямолинейными образующими квадрик Q конгруэнции, соответствуют друг другу. Доказана теорема существования и исследованы фокальные многообразия таких конгруэнций.

Отнесем конгруэнцию $\mathcal{L}$ к реперу $R = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$. Деривационные формулы репера R имеют вид [3]

$$dA_\alpha = \omega_\alpha^\beta A_\beta \quad , \tag{1}$$

причем формы Пфаффа ω_α^β удовлетворяют уравнениям структуры

$$\mathcal{D}\omega_\alpha^\beta = \omega_\alpha^\gamma \wedge \omega_\gamma^\beta \tag{2}$$

и условию эквипроективности

$$\omega_0^0 + \omega_1^1 + \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0 . \tag{3}$$

Обозначим

$$\omega^i = \omega_0^i , \quad \Omega = \omega_0^0 - \omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 . \tag{4}$$

Уравнение квадрики Q и система пфаффовых уравнений конгруэнции $\mathcal{L}$ приводятся соответственно к виду:

$$\mathcal{F} \equiv x^1 x^2 - x^0 x^3 = 0 , \tag{5}$$

$$\omega_0^3 = 0, \quad \omega_3^0 = 0, \quad \omega_i^j = 0, \quad \omega_i^3 = (1+c)\,\omega^j, \quad \omega_3^i = b^i \omega^i ,$$

$$\omega_i^0 = (1+m)\,\omega_3^j , \quad dc + (1+c)\Omega = 0 , \quad dm + (1+m)\Omega = 0, \tag{6}$$

$$\Omega = h_k \omega^k .$$

Здесь и в дальнейшем $i \neq j$ и по индексам i и j суммирование не производится. Для конгруэнции $\mathcal{L}$ справедливо неравенство:

$$b^1 b^2 (1+c)(1+m) \neq 0 . \tag{7}$$

Замыкая систему (4), получим:

$$\Delta b^i \wedge \omega^i = 0 , \quad \Delta h_k \wedge \omega^k = 0 , \tag{8}$$

$$(b^1 - b^2)(m-c) = 0 , \tag{9}$$

где

$$\Delta b^i = db^i + b^i(\omega_0^0 - \omega_3^3), \quad \Delta h_i + h_i(\omega_0^0 - \omega_i^i) . \tag{10}$$

Теорема. Существуют два и только два класса конгруэнций $\mathcal{L}$: конгруэнции $\mathcal{L}_1$ $(b^1 - b^2 = 0)$ и конгруэнции $\mathcal{L}_2$ $(m - c = 0)$, определяемые каждая с произволом одной функции двух аргументов.

Доказательство. Если

$$b^1 - b^2 = 0 , \tag{11}$$

то

$$\Delta b^1 = \Delta b^2 = 0 , \tag{12}$$

и замыкание системы (6) состоит только из одного квадратичного уравнения $\Delta h_k \wedge \omega^k = 0$. Если $m - c = 0$, то

$$\omega_i^0 = b^i \omega_i^3 , \tag{13}$$

причем замыкание системы (13) удовлетворяется в силу (7). В обоих случаях произвол решения - одна функция двух аргументов. Теорема доказана.

Имеем:

$$d\mathcal{F} = 2\vartheta\mathcal{F} + \Phi_k \omega^k, \tag{14}$$

где

$$\Phi_i = h_i x^1 x^2 + m b^i x^j x^3 + c x^0 x^3,$$

а ϑ -некоторая форма Пфаффа.

Фокальные точки квадрики $Q \in \mathcal{L}$ [1] определяются системой уравнений

$$\mathcal{F} = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_2 = 0. \tag{15}$$

Следовательно, A_i - сдвоенные фокальные точки. Из (6) непосредственно вытекает, что поверхности (A_i) вырождаются в линии.

Если $c=0$ или $m=0$, то на квадрике Q существует коника, каждая точка которой - фокальная [2]. Если же

$$cm \neq 0, \tag{16}$$

то кроме точек A_α существуют только две фокальные точки квадрики Q, определяемые уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x^1x^2 - x^0x^3 = 0, \quad h_1 x^1 + b^1 m x^3 + c x^0 = 0,\\ h_2 x^2 + b^2 m x^3 + c x^0 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Список литературы

1. Малаховский В.С., Махоркин В.В. Дифференциальная геометрия многообразий гиперквадрик в n-мерном проективном пространстве.- Труды геом.семинара. ВИНИТИ АН СССР, 1974, 6, с.113-133.

2. Малаховский В.С. Конгруэнции квадрик с фокальной конгруэнцией коник.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып.7, Калининград, 1976, с.54-60.

3. Фиников С.П. Метод внешних форм Картана, М.-Л., 1948.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.10 1979

УДК 513.73

А.В.Махоркин

СИСТЕМА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПФАФФА ОДНОГО КЛАССА КОМПЛЕКСОВ КВАДРИК В P_3

В работе рассматривается комплекс (трехпараметрическое семейство) невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такой, что фокальное многообразие квадрики комплекса содержит конику. Доказано, что система дифференциальных уравнений Пфаффа, определяющая комплекс квадрик, вполне интегрируема, и ее решение определяется с произволом девяти постоянных; коники, входящие в фокальное многообразие квадрики комплекса, принадлежат стационарной квадрике.

Определение. Комплексом K_s называется трехпараметрическое семейство невырожденных квадрик трехмерного проективного пространства, такое, что фокальное многообразие [1] квадрик семейства содержит конику.

В дальнейшем текущую квадрику комплекса K_s обозначим через Q, а конику, принадлежащую фокальному многообразию квадрики Q, через C.

Рассмотрим комплекс K_s в репере $\{A_0, A_1, A_2, A_3\}$, где A_0 является полюсом плоскости коники C относительно квадрики Q, а вершины A_1, A_2, A_3 расположены в плос-