object defining $\tilde{\Delta}^m$) has the maximal rank m. We obtain structural equations of structural forms of reduction $\tilde{H}^2(M_N)$ by using method of differential continuation. We obtain a partial connection Γ_V, defined by λ^a_{ib}, by explaining a geometric meaning of objects $\lambda^a_{ij}, \lambda^a_{ib}$ (which are differential continuations of λ^a_i).

УДК 514.75

ИНВАРИАНТНЫЕ ПОДПРОСТРАНСТВА, АССОЦИИРОВАННЫЕ С РЕГУЛЯРНОЙ ГИПЕРПОЛОСОЙ $H_r(L)$

С. Ю. В о л к о в а

(*Калининградское ВВМУ*)

Работа является продолжением исследований гиперполос $H_r(L)$ [1]. Показано, что каждая характеристика $\chi_{n-r-1} \subset H_r(L)$ несет однопараметрическое семейство F-плоскостей. Найдены поля оснащающих объектов, присоединяющих внутренним инвариантным образом оснащения в смысле Картана для *F*-распределения, *L*-распределения, χ-распределения, ассоциированных с гиперполосой $H_r(L)$. Введен в рассмотрение пучок нормалей 2-го рода для оснащающей *M*-плоскости. Приведены примеры построения однопараметрических пучков π-структур (неголономных композиций Нордена) для χ-распределения и *Ђ* - распределения данной гиперполосы $H_r(L)$.

Во всей работе придерживаемся терминологии и обозначений статьи [1]. Схема использования индексов следующая:

$$I, J, K = \overline{1,n};\ p, q, s, t = \overline{1,r};\ i, j, k = \overline{r+1,m};$$

$$\alpha, \beta, \gamma = \overline{m+1,n-1};\ u, v, w = \overline{r+1,n-1};\ a, b, c = \overline{1,m}.$$

Символом “$\equiv$“ обозначаем сравнение по модулю базисных форм ω^p.

1. Однопараметрический пучок плоскостей F_{n-m-1}. Рассмотрим гиперполосу $H_r(L)$ проективного пространства P_n, заданную в репере 1-го порядка $\{A_J\}$ [1]. С гиперполосой $H_r(L)$ ассоциируется поле F -плоскостей [1], т.е. в каждой точке A_0 базисной поверхности V_r гиперполосы определяется F-плоскость $F_{n-m-1}(A_0) = \chi_{n-r-1}(A_0) \cap N_{n-m}(A_0)$ - пересечение характеристики $\chi_{n-r-1}(A_0)$ гиперполосы и нормали 1-го рода $N_{n-m}(A_0)$ оснащающей M-плоскости $M_m(A_0) = [T_r(A_0), L_{m-r}(A_0)]$. Плоскость $F_{n-m-1}(A_0) = [A_0, F_\alpha] = [A_0, A_\alpha + \nu_\alpha^i A_i]$ в локальном репере $\{A_J\}$ задается уравнениями:

$$x^n = x^p = 0,\ x^i - \nu_\alpha^i x^\alpha = 0, \tag{1}$$

где величины $\{\nu_\alpha^i\}$ образуют квазитензор:

$$\nabla \nu_\alpha^i + \omega_\alpha^i = \nu_{\alpha p}^i \omega^p. \tag{2}$$

Используя объекты [1, § 3], получаем в общем случае два линейно независимых охвата квазитензора $\{\nu_\alpha^i\}$ в дифференциальной окрестности 2-го порядка:

$$B_\alpha{}^i = 1/r\, B_p{}^i{}_q \tilde{B}^{pq}_\alpha,\ \nabla B_\alpha{}^i + \omega_\alpha{}^i \equiv 0;\ L_\alpha{}^i = -1/r\ \tilde{B}^i_{pq}\ B^{pq}_\alpha, \nabla L_\alpha{}^i + \omega_\alpha{}^i \equiv 0,$$

и, следовательно, однопараметрический пучок квазитензоров

$$\nu_\alpha{}^i(\mu) = \mu B_\alpha{}^i - (\mu - 1)L_\alpha{}^i = L_\alpha{}^i + \mu(B_\alpha{}^i - L_\alpha{}^i). \qquad (3)$$

Отсюда вытекает:

ТЕОРЕМА 1. К каждой характеристике $\chi_{n-r-1}(A_0)$ гиперполосы $H_r(L)$ внутренним инвариантным образом присоединяется однопараметрическое семейство F-плоскостей:

$$x^n = 0,\ x^p = 0,\ x^i - \nu_\alpha{}^i(\mu)x^\alpha = 0, \qquad (4)$$

определяемое пучком квазитензоров $\nu_\alpha{}^i(\mu)$ (3) 2-го порядка.Осью пучка (4) является (n-m-2)-мерная плоскость $F_{n-m-2}(A_0)$:

$$x^n = 0,\ x^p = 0,\ x^i - B_\alpha{}^i x^\alpha = 0,\ T_\alpha{}^0 x^\alpha = 0, \qquad (5)$$

где $T_\alpha{}^0 = \hat{L}_i{}^0 T_\alpha{}^i = \hat{L}_i{}^0(B_\alpha{}^i - L_\alpha{}^i)$, $\nabla T_\alpha{}^0 + T_\alpha{}^i\omega_i{}^0 \equiv 0$.

2. Плоскость Кёнига K_{n-r-1}. При смещении вдоль кривых $\omega^n = 0$, $\omega_0{}^0 = 0$, $\omega^p = \mu^p\theta$, (6) принадлежащих базисной поверхности $V_r \subset H_r(L)$, фокальное многообразие $\Phi^r{}_{n-r-1}(\nu)(A_0)$ нормали 1-го рода $N_{n-r}(A_0)$ гиперполосы $H_r(L)$ имеет вид [2, §3], [3, § 3]:

$$x^p - \nu_n{}^p x^n = 0,\ \left|\delta_q{}^p x^0 + L_i{}^p{}_q x^i + N_\alpha{}^p{}_q x^\alpha + (\nu_n{}^p{}_q - b_t{}^n{}_q \nu_n{}^t \nu_n{}^p)x^n\right| = 0. \qquad (7)$$

Фокальное многообразие $\Phi^r{}_{n-r-1}(\nu)$ (7) представляет собой алгебраическое многообразие размерности n-r-1 порядка r. Линейная поляра точки A_0 относительно многообразия $\Phi^r{}_{n-r-1}(\nu)$ (7) есть плоскость $K_{n-r-1}(A_0) \subset N_{n-r}(A_0)$, которая в локальном репере задается уравнениями:

$$x^p - \nu_n{}^p x^n = 0,\ x^0 - \hat{L}_i{}^0 x^i - \hat{N}_\alpha{}^0 x^\alpha - \hat{\nu}_n{}^0 x^n = 0, \qquad (8)$$

причем

$$\begin{cases} \nabla\nu_n{}^p + \omega_n{}^p = \nu_n{}^p{}_q\omega^q;\ \hat{L}_i{}^0 = -1/r\, L_i{}^p{}_p,\ \nabla\hat{L}_i{}^0 + \omega_i{}^{\mathbf{0}} = \hat{L}_i{}^0{}_p\omega^p; \\ \hat{N}_\alpha{}^0 = -1/r\, N_\alpha{}^p{}_p,\ \nabla\hat{N}_\alpha{}^0 - \hat{L}_i{}^0\omega_\alpha{}^i + \omega_\alpha{}^0 = \hat{N}_\alpha{}^0{}_p\omega^p; \\ \hat{\nu}_n{}^0 = -1/r(\nu_n{}^p{}_p - b_p{}^n{}_q\nu_n{}^p\nu_n{}^q),\ \nabla\hat{\nu}_n{}^0 + \nu_n{}^p\omega_p{}^0 - \hat{N}_\alpha{}^0\omega_n{}^\alpha - \hat{L}_i{}^0\omega_n{}^i + \omega_n{}^0 = \hat{\nu}_n{}^0{}_p\omega^p. \end{cases} \qquad (9)$$

Поле плоскостей $K_{n-r-1}(A_0)$, определяемое уравнениями (8), есть поле оснащающих плоскостей в смысле Картана [2], [4] базисной поверхности $\mathbf{V_r} \subset H_r(L)$. По аналогии с [2], [3], [5] плоскость $K_{n-r-1}(A_0)$ (8) назовем плоскостью Кёнига инвариантной нормали 1-го рода $N_{n-r}(\nu)$, заданной квазитензором $\{\nu_n{}^p\}$.

3. Плоскости Кёнига, принадлежащие элементам L-распределения, χ-распределения, F-распределения. Найдем уравнения плоскостей, полученных при пересечении плоскости Кёнига $K_{n-r-1}(A_0)$ соответственно с плоскостями $L(A_0)$, $\chi(A_0)$, $F_{n-m-1}(\sigma)(A_0)$:

$$K_{l-1}(A_0) = L(A_0) \cap K_{n-r-1}(A_0):\ x^p = 0,\ x^\alpha = 0,\ x^n = 0,\ x^0 - \hat{L}_i{}^0 x^i = 0; \qquad (10)$$

$$K_{n-r-2}(A_0) = \chi(A_0) \cap K_{n-r-1}(A_0):\ x^p = 0,\ x^n = 0,\ x^0 - \hat{L}_i{}^0 x^i - \hat{N}_\alpha{}^0 x^\alpha = 0; \qquad (11)$$

$$F_{n-m-2}(\sigma) = F_{n-m-1}(A_0) \cap K_{n-r-1}(A_0):$$

$$x^n = 0,\ x^p = 0,\ x^i - \nu_\alpha^i(\sigma)x^\alpha = 0,\ x^0 - \nu_\alpha^0(\sigma)x^\alpha = 0, \tag{12}$$

где $\nu_\alpha^0(\sigma) = \hat{L}_i^0 \nu_\alpha^i(\sigma) + \hat{N}_\alpha^0$, $\nabla\nu_\alpha^0(\sigma) + \nu_\alpha^i(\sigma)\omega_i^0 + \omega_\alpha^0 \equiv 0$.

Исследуя уравнения (10) — (12), приходим к выводу, что плоскости $K_{l-1}(A_0)$, $K_{n-r-2}(A_0)$, $F_{n-m-2}(A_0)$ являются плоскостями Кёнигса, принадлежащими соответственно плоскостям $L(A_0)$, $\chi(A_0)$, $F_{n-m-1}(\sigma)$ (A_0). Ось пучка плоскостей $F_{n-m-2}(\sigma)$ (12) Кёнигса есть плоскость $F_{n-m-3}(A_0) \subset F_{n-m-2}(A_0)$, которую зададим относительно локального репера уравнениями

$$x^n = x^p = 0,\ x^i - B_\alpha^i x^\alpha = 0,\ T_\alpha^0 x^\alpha = 0, \tag{13}$$

где $B_\alpha^0 = \hat{L}_i^0 B_\alpha^i + \hat{N}_\alpha^0$, $\nabla B_\alpha^0 + B_\alpha^i \omega_i^0 + \omega_\alpha^0 \equiv 0$.

Плоскости (10) и (13) в каждой точке $A_0 \in V_r$ натягивают еще одну инвариантную плоскость $K_{n-r-3} = [F_{n-m-3}(A_0), K_{l-1}(A_0)] \subset K_{n-r-2}(A_0)$:

$$x^n = 0,\ x^p = 0,\ T_\alpha^0 x^\alpha = 0,\ x^0 - \hat{L}_i^0 x^i - \hat{N}_\alpha^0 x^\alpha = 0. \tag{14}$$

Следуя работам [2], [3], определим инвариантную точку Кёнигса

$$K_n(\nu) = \nu_n^0 A_0 + B_n^i A_i A_0 + B_n^\alpha A_\alpha + \nu_n^p A_p, \tag{15}$$

где $\nu_n^0 = \hat{\nu}_n^0 + \hat{L}_i^0 B_n^i + \hat{N}_\alpha^0 B_n^\alpha$, лежащую на инвариантной прямой $L(\nu)$ [2], [3].

Из уравнений (10) — (14) выясняется геометрический смысл ряда квазитензоров второго порядка.

ТЕОРЕМА 2. В каждой точке A_0 базисной поверхности гиперполосы $H_r(L)$ объекты 2-го порядка $\{\hat{L}_i^0\}$,$\{\hat{L}_i^0, \hat{N}_\alpha^0\}$, $\{\nu_\alpha^i(\sigma), \nu_\alpha^0(\sigma)\}$, $\{B_\alpha^i, B_\alpha^0, T_\alpha^0\}$, $\{B_\alpha^0, \hat{L}_i^0, \hat{N}_\alpha^0\}$, задают соответственно плоскости Кёнигса $K_{l-1}(A_0)$, $K_{n-r-1}(A_0)$, $F_{n-m-2}(\sigma)$ (A_0), ось $F_{n-m-3}(A_0)$ пучка(4) плоскостей Кёнигса и плоскость $K_{n-r-3}(A_0) \subset K_{n-r-2}(A_0)$ (11).

4. Пучок нормалей 2-го рода оснащающей М-плоскости. Нормаль 2-го рода М-плоскости зададим как плоскость, натянутую на плоскость Кёнигса $K_{l-1}(A_0)$ (10) и на некоторую нормаль 2-го рода $\{\nu_p^0\}$ [2]-[4] в смысле Нордена базисной поверхности $V_r \subset H_r(L)$. Отсюда следует, что пучок нормалей 2-го рода $\mathbb{N}_{r-1}(\mu)(A_0)$ [2]-[4]:

$$\nu_p^0(\mu) = \mu F_p^0 + (1-\mu) W_p^0$$

гиперполосы $H_r(L)$ порождает пучок нормалей 2-го рода оснащающей М-плоскости в каждой точке $A_0 \in V_r$:

$$x^\alpha = 0,\ x^n = 0,\ x^0 - \hat{L}_i^0 x^i - \nu_p^i(\mu) x^p = 0. \tag{16}$$

Осью пучка (16) является плоскость Кёнигса $K_{n-l}(A_0) \subset L(A_0)$.

5. π-структуры, ассоциированные с χ-распределением и Ђ-распределением. Согласно [6] всякую π-структуру на χ-распределении можно определить полем аффинора $\{A_u^v\} \neq \{\delta_u^v\}$, удовлетворяющего соотношениям:

$$A_w^v A_u^w = \delta_u^v. \tag{17}$$

Рассмотрим характеристику $\chi_{n-m-1}(A_0) = [L(A_0), F(A_0)]$ гиперполосы $H_r(L)$ как плоскость, натянутую на **L**-плоскость и F-плоскость (1).

Пусть $L(A_0) = [A_0, F_i]$, $F(A_0) = [A_0, F_\alpha]$, где

$$F_i = \delta_i^k A_k + \delta_i^\beta A_\beta,\ F_\alpha = \nu_\alpha^k A_k + \delta_\alpha^\beta A_\beta.$$

Так как точки $\{F_i, F_\alpha\} = \{F_v\}$ линейно независимы, то для матрицы

$$\left\| F_u^v \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_i^k & 0 \\ \nu_\alpha^k & \delta_\alpha^\beta \end{matrix} \right\| \tag{18}$$

существует обратная матрица $\| \overset{*}{F}{}_u^v \|$ такая, что

$$T_u^v \overset{*}{T}{}_w^u = \delta_w^v,\ T_u^v \overset{*}{T}{}_v^w = \delta_u^w. \tag{19}$$

Учитывая соотношения (18), (19), находим матрицу

$$\left\| \overset{*}{F}{}_u^v \right\| = \left\| \begin{matrix} \delta_i^k & 0 \\ \nu_\alpha^k & \delta_\alpha^\beta \end{matrix} \right\| \tag{20}$$

Величины

$$A_v^u \overset{\text{def}}{=} \delta_v^u - 2T_k^u \overset{*}{T}{}_v^k \tag{21}$$

образуют тензор и удовлетворяют условиям (17). Используя матрицы (18), (20), находим компоненты тензора (21):

$$A_i^k = -\delta_i^k,\ A_i^\alpha = 0,\ A_\beta^k = 2\nu_\beta^k,\ A_\beta^\alpha = \delta_\beta^\alpha. \tag{22}$$

Поле аффинора A_v^u (21) задает в общем случае неголономную π-структуру (L, F) на χ-распределении, базовыми распределениями которой являются L-распределение и F-распределение. Следуя работе [7], будем говорить, что поле аффинора $\{A_v^u\}$ задает на χ-распределении неголономную композицию Нордена (L, F). Так как в дифференциальной окрестности 2-го порядка построен пучок квазитензоров $\nu_\alpha{}^i(\mu)$(3) (пучок F-плоскостей (4)), то в результате приходим к предложению.

ТЕОРЕМА 3. χ-распределение несет однопараметрическое семейство неголономных композиций Нордена (L, F(μ)), определенных внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности 2-го порядка пучком аффиноров $A_u^v(\mu)$, где

$$\| A_u^v(\mu) \| = \left\| \begin{matrix} -\delta_i^k & 0 \\ 2\nu_\beta^k(\mu) & \delta_\beta^\alpha \end{matrix} \right\|$$

Базовыми распределениями семейства (L, F(μ)) неголономных композиций Нордена являются распределения плоскостей L и F(μ), где F(μ)-плоскости пучка (4), соответствующие пучку квазитензоров (3). *def*

Рассмотрим плоскость $Ъ_{n-l-1}(A_0) \equiv Ъ$, удовлетворяющую условиям:

$$[\Lambda(A_0), F(A_0)] = Ъ(A_0);\ \Lambda(A_0) \cap F(A_0) = A_0.$$

Распределение плоскостей $Ъ_{n-l-1}$, ассоциированных с гиперполосой $H_r(L)$, назовем Ъ-распределением. Для Ъ-распределения имеет место аналогичная.

ТЕОРЕМА 4.Ъ-распределение несет однопараметрическое семейство неголономных композиций Нордена (Λ,F(μ)), определенных внутренним инвариантным образом в дифференциальной окрестности 2-го порядка пучком аффиноров $B_u^v(\mu)$, где

$$\| B_u^v(\mu) \| = \begin{Vmatrix} -\delta_i^k & 0 \\ 2\nu_\beta^k(\mu) & \delta_\beta^\alpha \end{Vmatrix}.$$

Базовыми распределениями семейства неголономных композиций Нордена являются распределения плоскостей Λ и $F(\mu)$, где $F(\mu)$ — плоскости пучка (4), соответствующие пучку квазитензоров (3).

Библиографический список

1. *Волкова С.Ю.* Нормализации Нордена-Чакмазяна, ассоциированные с регулярной гиперполосой $H_r(L)$ проективного пространства // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Калининград, 1996. Вып.27. С.24-33.

2. *Попов Ю.И., Столяров А.В.* Специальные классы регулярных гиперполос: Учеб. пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1992 80 с.

3. *Столяров А.В.* Двойственная теория регулярных гиперполос и ее приложения: Учеб. пособие / Чувашский госпединститут им. И.Я.Яковлева. Чебоксары, 1994. 116 с.

4. *Попов Ю.И.* Общая теория регулярных гиперполос: Учебное пособие / Калинингр. ун-т. Калининград, 1983. 82 с.

5. *Остиану Н.М.* Распределение гиперплоскостных элементов в проективном пространстве // Тр. геометр. семинара / ВИНИТИ. М., 1973. Т.4. С.71-120.

6. *Широков А.П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Алгебра. Топология. Геометрия / ВИНИТИ. М., 1974. Т.2. С.153-207.

7. *Домбровский Р.Ф.* О неголономных композициях на поверхностях $M_{m,\mathbf{r}}$ в P_n. Всесоюзная научная конференция по неевклидовой геометрии “150 лет геометрии Лобачевского”. М., 1976. С.69.

S. Yu. V o l k o v a

INVARIANT SUBSPACES ASSOCIATED WITH A REGULAR HYPERSTRIP $H_r(L)$

The article is the continuation of investigations of a regular hyperstrip $H_r(L)$. It is shown, that each characteristic $\chi_{n-r-1} \subset H_r(L)$ imply an one-parameter family of F-planes. Fields of equipping objects are found, joining, by the interior way, equipments in the sence of Cartan for the F-, L-, χ-distributions associated with the hyperstrip $H_r(L)$. A bundle of normals of the second genus for an equipping M-plane is introduced. Examples are brought of a constructions of one-parameter bundles of π-

structures (of nonholonomic compositions of Norden) for the χ -distributions and for the Ђ-distributions of the given hyperstrip $H_r(L)$.

УДК 514.76

О СИММЕТРИЯХ КВАЗИГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ПОТОКОВ

В.А.И г о ш и н

(Нижегородский государственный университет им.Н.И.Лобачевского)

С помощью пульверизационного моделирования [1], [2] получен ряд теорем о размерностях максимальных алгебр Ли симметрий квазигеодезических потоков (КП) - обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

1. Произвольный КП $f\equiv(M,f)$ на многообразии M локально представляется дифференциальным уравнением

$$d^2x^i/dt^2=f^i(x^j, t, dx^j/dt) \tag{1}$$

$1\leq i, j\leq n-1 = \dim M$. Все объекты будут предполагаться дифференцируемыми достаточное число раз.

Если функции f^i являются полиномами относительно скоростей dx^j/dt, то КП f называется полиномиальным [3].

Пусть $f\equiv(M,f)$ и $h\equiv(N,h)$ - два КП. Отображение Ф: $\overline{M}=M\times R\to \overline{N}=N\times R$, переводящие интегральные кривые КП f в интегральные кривые КП h называется [4] точечным отображением КП.

В работах [1] и [2] в пространстве событий $\overline{M}=M\times R$ произвольного КП f построена (моделирующая КП f стандартная) обобщенная связность Г, геодезические линии которой совпадают с интегральными кривыми КП f. При этом точечное отображение КП отождествляется с проективным соответствием моделирующих эти КП обобщенных связностей; аффинное соответствие связностей определяет аффинное точечное отображение моделирующих КП. Надо заметить, что в рамках классической теории С.Ли класс аффинных точечных отображений КП не был обнаружен.

Векторное поле X на $\overline{M}$, порождающее однопараметрическую группу проективных (или аффинных) симметрий КП f, будем называть в пределах данной статьи инфинитезимальной проективной (или аффинной) симметрией. Известно, что инфинитезимальные проективные симметрии (ПС) и аффинные симметрии (АС) образуют апгебры Ли симметрий для ланного КП f.

2. С помощью пульверизационного моделирования и классических результатов (см., например, [5] - [7]), относящихся к обобщенным пространствам, получены следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Максимальная размерность алгебры Ли аффинных симметрий (АС) (n-1)-мерного КП (M_{n-1}, f) равна $r=n^2 + n$.

ТЕОРЕМА 2. Для того, чтобы (n-1)-мерный КП (M_{n-1}, f) допускал полную алгебру Ли АС максимальной размерности $r=n^2 + n$, необходимо и достаточно, чтобы КП f был аффинно изоморфен тривиальному КП. В частности, одномер-