УДК 514.75(08)

Ю. И. Попов

НОРМАЛИЗАЦИЯ ОСНОВНЫХ СТРУКТУРНЫХ ПОДРАССЛОЕНИЙ $H(\Lambda, L)$-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АФФИННОГО ПРОСТРАНСТВА

Впервые рассмотрен специальный класс скомпонованных гиперплоскостных распределений — $H(\Lambda, L)$-распределение аффинного пространства. Введены соответствия Бомпьяни — Пантази, ассоциированные с основными структурными подрасслоениями $H(\Lambda, L)$-распределения аффинного пространства. Построены нормализации в смысле Нордена основных структурных подрасслоений в дифференциальных окрестностях 1-го и 2-го порядка $H(\Lambda, L)$-распределения.

The author pioneers to study a special class of the grouped hyperplane distributions — the $H(\Lambda, L)$-distribution of affine space. He introduces Bompiani — Pantazi correspondences associated with the main structural subbundles of the $H(\Lambda, L)$-distribution of affine space. Norden's normalizations of the main structural subbundles in the differential 1st and 2nd order neighbourhoods of $H(\Lambda, L)$-distribution are constructed.

Ключевые слова: соответствие Бомпьяни — Пантази, нормализация, распределение, подрасслоение, тензор, квазитензор.

Keywords: Bompiani — Pantazi correspondence, normalization, distribution, subbundle, tensor, quasitensor.

Во всей работе использована следующая схема индексов:

$$J, K, L = \overline{1, n}; \ i, j, k, \ldots = \overline{2, n-1}; \ \alpha, \beta, \gamma, \varepsilon = \overline{1, n-1}.$$

1. Задание гиперплоскостного скомпонованного распределения $H(\Lambda, L)$ аффинного пространства

1. Пусть дано n-мерное аффинное пространство A_n, отнесенное к подвижному реперу $R = \{M, \overline{e}_J\}$, уравнения инфинитезимального перемещения которого имеют вид

$$d\overline{M} = \omega^J \overline{e}_J, \ d\overline{e}_J = \omega_J^K \overline{e}_K,$$

где формы Пфаффа ω^J, ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям аффинного пространства A_n:

$$D\omega^J = \omega^L \wedge \omega_L^J, \ D\omega_J^K = \omega_J^L \wedge \omega_L^K.$$

2. Рассмотрим специальный класс *гиперплоскостных скомпонованных распределений* [1] аффинного пространства, в каждом центре A которого выполняются соотношения

$$[\Lambda_{n-2}(A), L_1] = H_{n-1}(A), \ \Lambda_{n-2}(A) \cap L_1(A) = A,$$

которые кратко назовем $H(\Lambda, L)$-*распределением*.

Распределение $(n-2)$-плоскостей $\Lambda_{n-2}(A) \overset{\text{def}}{=} \Lambda(A)$ и распределение прямых $L_1(A) \overset{\text{def}}{=} L(A)$ назовем, соответственно, Λ-*подрасслоением* и L-*подрасслоением* данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

Присоединим подвижный репер $R = \{M, \overline{e}_J\}$ пространства A_n к $H(\Lambda, L)$-распределению следующим образом:

$$M \equiv A, \ \{\overline{e}_i\} \subset \Lambda(A), \ \overline{e}_1 \parallel L(A), \ \overline{e}_n \notin H_{n-1}(A). \tag{1.1}$$

Относительно выбранного репера нулевого порядка R_0 $H(\Lambda, L)$-распределение задается уравнениями

$$\omega_i^n = \Lambda_{iK}^n \omega^K, \ \omega_1^n = \Lambda_{1K}^n \omega^K, \ \omega_i^1 = \Lambda_{iK}^1 \omega^K, \ \omega_1^i = \Lambda_{1K}^i \omega^K, \tag{1.2}$$

$$\begin{gathered} \nabla \Lambda_{iK}^n = \Lambda_{iKL}^n \omega^L, \ \nabla \Lambda_{1K}^n = \Lambda_{1KL}^n \omega^L, \\ \nabla \Lambda_{iK}^1 + \Lambda_{iK}^1 \omega_n^1 = \Lambda_{iKL}^1 \omega^L, \ \nabla \Lambda_{1K}^i + \Lambda_{1K}^n \omega_n^i = \Lambda_{1KL}^i \omega^L. \end{gathered} \tag{1.3}$$

Отметим, что совокупности функций

$$\Gamma_1 = \{\Lambda_{iK}^n, \Lambda_{1K}^n, \Lambda_{iK}^1, \Lambda_{1K}^i\}, \ \Gamma_2 = \{\Gamma_1, \Lambda_{iKL}^n, \Lambda_{1KL}^n, \Lambda_{iKL}^1, \Lambda_{1KL}^i\}, \ldots$$

образуют последовательность фундаментальных геометрических объектов $H(\Lambda, L)$-распределения [2].

Имеет место теорема существования $H(\Lambda, L)$-распределения.

Теорема 1. *$H(\Lambda, L)$-распределение аффинного пространства A_n существует с произволом* $3(n-2)+1 = 3n-5$ *функций n аргументов.*

Замечание. С одной стороны, теорема существования есть следствие теоремы 1 работы [1]. С другой стороны, очевидно, что утверждение теоремы 1 непосредственно следует из разложения (1.2), если учесть, что все коэффициенты в (1.2) функционально независимы.

2. Соответствия Бомпьяни — Пантази, ассоциированные с основными структурными подрасслоениями $H(\Lambda, L)$-распределения

1. Из уравнений (1.2), (1.3) следует, что функции $\{\Lambda_{ij}^n\}$, $\{\Lambda_{11}^n\}$, $\{\Lambda_{\alpha\beta}^n\}$ образуют невырожденные тензоры 1-го порядка

$$\nabla \Lambda_{ij}^n = \Lambda_{ijK}^n \omega^K, \ \nabla \Lambda_{11}^n = \Lambda_{11K}^n \omega^K, \ \nabla \Lambda_{\alpha\beta}^n = \Lambda_{\alpha\beta K}^n \omega^K, \tag{2.1}$$

которые являются основными (главными) фундаментальными тензорами Λ-, L-, H-подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения.

Введем для них *обращенные фундаментальные тензоры* [3] первого порядка $\{\Lambda_n^{ij}\}, \{\Lambda_n^{11}\}, \{\Lambda_n^{\alpha\beta}\},$ удовлетворяющие соотношениям

$$\Lambda_{ij}^n \Lambda_n^{jk} = \delta_i^k, \ \Lambda_{ji}^n \Lambda_n^{kj} = \delta_i^k, \ \Lambda_{11}^n \Lambda_n^{11} = 1, \\ \Lambda_{\alpha\beta}^n \Lambda_n^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma, \ \Lambda_{\beta\alpha}^n \Lambda_n^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma \tag{2.2}$$

и уравнениям

$$\nabla\Lambda_n^{ij} \equiv 0, \ \nabla\Lambda_n^{11} \equiv 0, \ \nabla\Lambda_n^{\alpha\beta} \equiv 0. \tag{2.3}$$

Нормализацию Нордена $(\mathcal{N}_1, \mathfrak{N}_{n-2})$ H-подрасслоения [4] данного $H(\Lambda, L)$-распределения зададим полями объектов $\{\nu_n^\alpha\}$ и $\{\nu_\alpha\}$:

$$\nabla\nu_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \nu_{nK}^\alpha \omega^K, \ \nabla\nu_\alpha = \nu_{\alpha K}\omega^K. \tag{2.4}$$

Введем, учитывая (1.3) и (2.5), соответствие Бомпьяни — Пантази [5; 6] между нормалями Нордена 1-го $\{\nu_n^\alpha\}$ и 2-го рода $\{\nu_\alpha\}$ H-подрасслоения [7]:

$$\nu_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n \nu_n^\beta + \mathcal{A}_\alpha, \tag{2.5}$$

где

$$\mathcal{A}_\alpha = \Lambda_{\alpha n}^n, \ \nabla\mathcal{A}_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n \omega_n^\beta + \mathcal{A}_{\alpha K}\omega^K. \tag{2.6}$$

Разрешим уравнения (2.5) относительно $\{\nu_n^\beta\}$ с учетом формул (2.2):

$$\nu_n^\alpha = \Lambda_n^{\alpha\beta}\nu_\beta + \mathcal{A}_n^\alpha. \tag{2.7}$$

Здесь в силу формул (2.6), (2.3) имеем:

$$\mathcal{A}_n^\alpha = -\Lambda_n^{\alpha\beta}\mathcal{A}_\beta, \ \nabla\mathcal{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathcal{A}_{nK}^\alpha \omega^K. \tag{2.8}$$

Итак, соответствие Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода в смысле Нордена для H-подрасслоения задается формулами (2.5), (2.7). Как показано в работе [7], поле квазитензора $\{\mathcal{A}_n^\alpha\}$ (2.8) задает *поле нормалей Алшибая* [5; 6] H-подрасслоения.

2. Аналогично будем искать биекции Бомпьяни — Пантази между нормалями Нордена 1-го и 2-го рода для Λ-, L-подрасслоений в виде (2.5), (2.7).

а) Так, при $\alpha = i$ из формул (2.5) имеем:

$$\nu_i = \Lambda_{ij}^n \nu_n^j + \Lambda_{i1}^n \nu_n^1 + \mathcal{A}_i \Leftrightarrow \nu_i = \Lambda_{ij}^n \nu_n^j + \tilde{\mathcal{A}}_i. \tag{2.9}$$

Функции $\mathcal{A}_i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{in}^n, \ \tilde{\mathcal{A}}_i \overset{\text{def}}{=} \mathcal{A}_i + \Lambda_{i1}^n \nu_n^1,$ согласно (1.3), (2.4), (1.2), удовлетворяют соотношениям

$$\nabla\mathcal{A}_i \equiv \Lambda_{ij}^n \omega_n^j + \Lambda_{i1}^n \omega_n^1, \ \nabla\tilde{\mathcal{A}}_i \equiv \Lambda_{ij}^n \omega_n^j. \tag{2.10}$$

Разрешая уравнения (2.9) относительно ν_n^j и используя при этом (1.3), (2.3), (2.10), получаем:

$$\nu_n^i = \Lambda_n^{ij}\nu_j + \mathcal{A}_n^i, \qquad (2.11)$$

где

$$\mathcal{A}_n^i \equiv -\Lambda_n^{ij}\tilde{\mathcal{A}}_j,\ \nabla\mathcal{A}_n^i + \omega_n^i \equiv \tilde{\mathcal{A}}_{nK}^i\omega^K. \qquad (2.12)$$

Поле квазитензора $\{\mathcal{A}_n^i\}$ (2.12) задает поле нормалей $\mathcal{A}_2$ Алшибая [7] Λ-подрасслоения.

б) При $\alpha = 1$ из формул (2.5) имеем:

$$\nu_1 = \Lambda_{11}^n\nu_n^1 + \Lambda_{1i}^n\nu_n^i + \Lambda_{1n}^n = \Lambda_{11}^n\nu_n^1 + \tilde{\mathcal{A}}_1, \qquad (2.13)$$

где

$$\tilde{\mathcal{A}}_1 = \Lambda_{1n}^n + \Lambda_{1i}^n\nu_n^i = \mathcal{A}_1 + \Lambda_{1i}^n\nu_n^i,\ \nabla\tilde{\mathcal{A}}_1 \equiv \Lambda_{11}^n\omega_n^1.$$

Из уравнений (2.13) найдем ν_n^1:

$$\nu_n^1 = \Lambda_n^{11}\nu_1 + \mathcal{A}_n^1, \qquad (2.14)$$

где

$$\mathcal{A}_n^1 = -\Lambda_n^{11}\tilde{\mathcal{A}}_1,\ \nabla\mathcal{A}_n^1 + \omega_n^1 = \mathcal{A}_{nK}^1\omega^K. \qquad (2.15)$$

Следовательно, уравнения (2.9), (2.11) и, соответственно, (2.13), (2.15) задают биекции Бомпьяни — Пантази между нормалями Нордена 1-го и 2-го рода Λ-, L-подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения.

Поле квазитензора $\{\mathcal{A}_n^1\}$ (2.15) задает поле нормалей $\mathcal{A}_{n-1}$ Алшибая [7] L-подрасслоения. Из уравнений (2.12) и (2.15) вытекает, что поле нормалей Алшибая

$$\mathcal{A}_1(A) = \mathcal{A}_{n-1}(A) \cap \mathcal{A}_\alpha(A)$$

$H(\Lambda, L)$-распределения задается полем квазитензора $\{\mathcal{A}_n^\alpha\}$ (2.8).

Резюмируя, приходим к следующему выводу.

Теорема 2. *Соотношения* ((2.11), (2.9)), ((2.14), (2.13)), ((2.7), (2.5)) *определяют биекцию Бомпьяни — Пантази между нормалями 1-го и 2-го рода* Λ-, *L-, H-подрасслоений. Поля квазитензоров* $\{\mathcal{A}_n^i\}$ (2.12), $\{\mathcal{A}_n^1\}$ (2.15), $\{\mathcal{A}_n^\alpha\}$ (2.8) *1-го порядка задают поля нормалей Алшибая* [7] *соответственно* Λ-, *L-, H-подрасслоений данного H*(Λ, *L*)*-распределения.*

3. Построение нормализаций Нордена основных структурных подрасслоений в дифференциальной окрестности 1-го порядка

1. Используя компоненты фундаментального объекта Γ_1 первого порядка, найдем охваты квазитензоров $\{\nu_n^i\}$, $\{\nu_n^1\}$, $\{\nu_n^\alpha\} \overset{\text{def}}{=} \{\nu_n^i, \nu_n^1\}$, определяющих нормали 1-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений данного $H(\Lambda, L)$-распределения:

$$\text{а)}\quad \nu_n^i = \Lambda_n^i \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_n^{ij}\Lambda_{jn}^n - \Lambda_n^1\Lambda_{j1}^n\Lambda_n^{ij},\ \nu_n^1 = \Lambda_n^1 \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{n-2}\Lambda_n^{ij}\Lambda_{ji}^1, \quad \nu_n^\alpha = \Lambda_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} \{\Lambda_n^i, \Lambda_n^1\}; \tag{3.1}$$

$$\text{б)}\quad \nu_n^i = L_n^i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_n^{11}\Lambda_{11}^i,\ \nu_n^1 = L_n^1 \overset{\text{def}}{=} -\Lambda_n^i\Lambda_{1i}^n\Lambda_n^{11} - \Lambda_n^{11}\Lambda_{1n}^n, \quad \nu_n^\alpha = L_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} \{L_n^i, L_n^1\}. \tag{3.2}$$

В силу биекций (2.9), (2.13), (2.5) нормалям 1-го рода (3.1), (3.2) поставим в соответствие нормаль второго рода Λ-, L-, H-подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения:

$$\text{а)}\quad \nu_i = \lambda_i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^n\Lambda_n^j + \tilde{\mathcal{A}}_i,\ \nu_1 = \lambda_1 \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{11}^n\Lambda_n^1 + \tilde{\mathcal{A}}_1, \quad \nu_\alpha = \lambda_\alpha \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^n\Lambda_n^\beta + \mathcal{A}_\alpha; \tag{3.3}$$

$$\text{б)}\quad \nu_i = l_i \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{ij}^nL_n^j + \tilde{\mathcal{A}}_i,\ \nu_1 = l_1 \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{11}^nL_n^1 + \tilde{\mathcal{A}}_1, \quad \nu_\alpha = l_\alpha \overset{\text{def}}{=} \Lambda_{\alpha\beta}^nL_n^\beta + \mathcal{A}_\alpha. \tag{3.4}$$

Из соотношений (3.1)—(3.4) сразу следует, что в дифференциальной окрестности 1-го порядка имеем нормализации в смысле Нордена следующего вида:

а) (Λ_n^i, λ_i), (L_n^i, l_i) на Λ-подрасслоении;

б) (Λ_n^1, λ_1), (L_n^1, l_1) на L-подрасслоении;

в) $(\Lambda_n^\alpha, \lambda_\alpha)$, (L_n^α, l_α) на H-подрасслоении.

Кроме того, заметим, что каждая пара (Λ_n^i, L_n^i), (Λ_n^1, L_n^1), $(\Lambda_n^\alpha, L_n^\alpha)$ квазитензоров функционально независима. Это дает возможность построить в дифференциальной окрестности 1-го порядка однопараметрические пучки (σ, η, ζ — параметры)

$$N_n^i(\sigma) = \Lambda_n^i + \sigma(L_n^i - \Lambda_n^i),\ N_n^1(\eta) = \Lambda_n^1 + \eta(L_n^1 - \Lambda_n^1), \quad N_n^\alpha(\zeta) = \Lambda_n^\alpha + \zeta(L_n^\alpha - \Lambda_n^\alpha) \tag{3.5}$$

нормалей Нордена 1-го рода соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

Из соотношений (3.5), согласно биекциям (2.9), (2.13), (2.5), получаем соответствующие пучки нормалей 2-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений:

$$\mathfrak{N}_i(\sigma) = \lambda_i + \sigma(l_i - \lambda_i),\ \mathfrak{N}_1(\eta) = \lambda_1 + \eta(l_1 - \lambda_1), \quad \mathfrak{N}_\alpha(\zeta) = \lambda_\alpha + \zeta(l_\alpha - \lambda_\alpha). \tag{3.6}$$

Теорема 3. *В дифференциальной окрестности 1-го порядка $H(\Lambda, L)$-распределение внутренним образом порождает три однопараметрических семейства нормализаций*

$$(N_n^i(\sigma), \mathfrak{N}_i(\sigma)),\ (N_n^1(\eta), \mathfrak{N}_1(\eta)),\ (N_n^\alpha(\zeta), \mathfrak{N}_\alpha(\zeta))$$

в смысле Нордена соответственно Λ-, L-, H-подрасслоений.

4. Построение нормализаций Нордена основных структурных подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка

1. Прежде всего покажем способ построения нормалей 1-го рода Λ-, L-, H-подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения в дифференциальной окрестности 2-го порядка, исходя из построенных ранее объектов 1-го порядка $\{\mathcal{A}_n^\alpha\}$ (2.8), $\{\Lambda_n^\alpha\}$ (3.1), $\{L_n^\alpha\}$ (3.2). Продолжая уравнения (2.8), получаем равенства

$$\nabla \mathcal{A}_{nK}^\alpha + (\mathcal{A}_n^\alpha \Lambda_{\gamma K}^n + \mathcal{A}_n^\beta \Lambda_{\beta K}^n \delta_\gamma^\alpha)\omega_n^\gamma = \mathcal{A}_{nKL}^\alpha \omega^L. \tag{4.1}$$

Из (4.1), полагая $K = \beta$ и $K = n$, имеем систему уравнений:

$$\begin{aligned} &\nabla \mathcal{A}_{n\beta}^\alpha + (\mathcal{A}_n^\alpha \Lambda_{\gamma\beta}^n + \delta_\gamma^\alpha \mathcal{A}_n^\varepsilon \Lambda_{\varepsilon\beta}^n)\omega_n^\gamma = \mathcal{A}_{n\beta L}^\alpha \omega^L, \\ &\nabla \mathcal{A}_{nn}^\alpha - (\mathcal{A}_{n\beta}^\alpha - \mathcal{A}_n^\alpha \Lambda_{\beta n}^n - \delta_\beta^\alpha \mathcal{A}_n^\gamma \Lambda_{\gamma n}^n)\omega_n^\beta = \mathcal{A}_{nnL}^\alpha \omega^L. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Введем в рассмотрение следующие функции 2-го порядка:

$$\mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha = \mathcal{A}_{n\beta}^\alpha - \mathcal{A}_n^\alpha \mathcal{A}_n^\gamma \Lambda_{\gamma\beta}^n, \tag{4.3}$$

дифференциальные уравнения которых, согласно (4.2), (2.8), (2.1), имеют вид

$$\nabla \mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha = \mathfrak{A}_{n\beta K}^\alpha \omega^K. \tag{4.4}$$

Из (4.4) следует, что величины $\{\mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha\}$ (4.3) образуют тензор 2-го порядка [2; 4]. В общем случае тензор $\{\mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha\}$ — невырожденный и, следовательно, для него можно построить обратный тензор $\{\tilde{\mathfrak{A}}_\gamma^{n\beta}\}$:

$$\mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha \tilde{\mathfrak{A}}_\gamma^{n\beta} = \delta_\gamma^\alpha, \;\; \mathfrak{A}_{n\beta}^\alpha \tilde{\mathfrak{A}}_\alpha^{n\gamma} = \delta_\beta^\gamma, \;\; \nabla \tilde{\mathfrak{A}}_\gamma^{n\beta} = \tilde{\mathfrak{A}}_{\gamma K}^{n\beta} \omega^K. \tag{4.5}$$

Наконец, в силу (4.5), (4.2), (2.8), (3.1) убеждаемся, что функции

$$\mathfrak{A}_n^\alpha \overset{\text{def}}{=} -\tilde{\mathfrak{A}}_\beta^{n\alpha}(\mathcal{A}_{nn}^\beta - \mathcal{A}_n^\beta \mathcal{A}_n^\gamma \Lambda_{\gamma n}^n)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \mathfrak{A}_n^\alpha + \omega_n^\alpha = \mathfrak{A}_{nK}^\alpha \omega^K, \tag{4.6}$$

то есть образуют квазитензор 2-го порядка $\{\mathfrak{A}_n^\alpha\}$, который имеет два подобъекта $\{\mathfrak{A}_n^i\}$, $\{\mathfrak{A}_n^1\}$, поскольку из (4.6) при $\alpha = i$ и $\alpha = 1$ получаем:

$$\nabla \mathfrak{A}_n^i + \omega_n^i = \mathfrak{A}_{nK}^i \omega^K, \;\; \nabla \mathfrak{A}_n^1 + \omega_n^1 = \mathfrak{A}_{nK}^1 \omega^K. \tag{4.7}$$

Поля (4.6), (4.7) геометрических объектов $\{\mathfrak{A}_n^\alpha\}$, $\{\mathfrak{A}_n^i\}$, $\{\mathfrak{A}_n^1\}$ задают поля нормалей Нордена 1-го рода соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений данного $H(\Lambda, L)$-распределения.

Используя соответствия Бомпьяни — Пантази (2.5), (2.9), (2.13), квазинормалям (4.6), (4.7) поставим в соответствие тензоры 2-го порядка:

$$\mathfrak{A}_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta}\mathfrak{A}^\beta_n + \mathcal{A}_\alpha,\ \ \mathfrak{A}_i = \Lambda^n_{ij}\mathfrak{A}^j_n + \tilde{\mathcal{A}}_i,\ \ \mathfrak{A}_1 = \Lambda^n_{11}\mathfrak{A}^1_n + \tilde{\mathcal{A}}_1.$$

В результате справедлива

Теорема 4. *Нормализации*

$$(\mathfrak{A}^\alpha_n, \mathfrak{A}_\alpha),\ (\mathfrak{A}^i_n, \mathfrak{A}_i),\ (\mathfrak{A}^1_n, \mathfrak{A}_1)$$

Нордена H-, Λ-, L-подрасслоений внутренним образом определены в дифференциальной окрестности 2-го порядка элемента H(Λ, L)-распределения.

2. Проведем аналогичные построения (см. п. 1) нормализаций основных подрасслоений $H(\Lambda, L)$-распределения, исходя из объекта $\{\Lambda^\alpha_n\}$ (3.1), компоненты которого удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\Lambda^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \Lambda^\alpha_{nK}\omega^K. \tag{4.8}$$

Продолжая (4.8) (при $K = \beta$ и $K = n$), получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \nabla\Lambda^\alpha_{n\beta} + (\Lambda^\alpha_n\Lambda^n_{\gamma\beta} + \delta^\alpha_\gamma\Lambda^\varepsilon_n\Lambda^n_{\varepsilon\beta})\omega^\gamma_n = \Lambda^\alpha_{n\beta L}\omega^L, \\ \nabla\Lambda^\alpha_{nn} - (\Lambda^\alpha_{n\beta} - \Lambda^\alpha_n\Lambda^n_{\beta n} - \delta^\alpha_\beta\Lambda^\gamma_n\Lambda^n_{\gamma n})\omega^\beta_n = \Lambda^\alpha_{nnL}\omega^L. \end{cases} \tag{4.9}$$

Далее введем невырожденный тензор 2-го порядка $\{\mathfrak{B}^\alpha_{n\beta}\}$, где

$$\mathfrak{B}^\alpha_{n\beta} = \Lambda^\alpha_{n\beta} - \Lambda^\alpha_n\Lambda^\gamma_n\Lambda^n_{\gamma\beta},\ \ \nabla\mathfrak{B}^\alpha_{n\beta} \equiv 0,$$

и обратный ему тензор $\{\tilde{\mathfrak{B}}^{n\beta}_\gamma\}$:

$$\mathfrak{B}^\alpha_{n\beta}\tilde{\mathfrak{B}}^{n\beta}_\gamma = \delta^\alpha_\gamma,\ \ \mathfrak{B}^\alpha_{n\beta}\tilde{\mathfrak{B}}^{n\gamma}_\alpha = \delta^\gamma_\beta,\ \ \nabla\tilde{\mathfrak{B}}^{n\beta}_\gamma = \tilde{\mathfrak{B}}^{n\beta}_{\gamma K}\omega^K. \tag{4.10}$$

Тогда функции

$$\mathfrak{B}^\alpha_n \overset{\text{def}}{=} -\tilde{\mathfrak{B}}^{n\alpha}_\beta(\Lambda^\beta_{nn} - \Lambda^\beta_n\Lambda^\gamma_n\Lambda^n_{\gamma n})$$

с учетом соотношений (4.10), (4.9), (4.8), (1.3) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\mathfrak{B}^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \mathfrak{B}^\alpha_{nK}\omega^K. \tag{4.11}$$

Непосредственной проверкой, пользуясь уравнениями (4.11), убеждаемся, что функции $\{\mathfrak{B}^i_n\}$ и $\{\mathfrak{B}^1_n\}$ удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\nabla\mathfrak{B}^i_n + \omega^i_n = \mathfrak{B}^i_{nK}\omega^K,\ \ \nabla\mathfrak{B}^1_n + \omega^1_n = \mathfrak{B}^1_{nK}\omega^K. \tag{4.12}$$

Итак, поля (4.11), (4.12) квазитензоров

$$\{\mathfrak{B}^\alpha_n\}, \{\mathfrak{B}^i_n\}, \{\mathfrak{B}^1_n\} \tag{$*$}$$

задают соответственно поля нормалей 1-го рода H-, Λ-, L-подрасслоений данного $H(\Lambda, L)$-распределения. В силу биекций (2.5), (2.9), (2.13) квазитензорам (∗) поставим в соответствие тензоры

$$\{\mathfrak{B}_\alpha\}, \{\mathfrak{B}_i\}, \{\mathfrak{B}_1\},$$

где

$$\mathfrak{B}_\alpha = \Lambda^n_{\alpha\beta}\mathfrak{B}^\beta_n + \mathcal{A}_\alpha,\ \ \mathfrak{B}_i = \Lambda^n_{ij}\mathfrak{B}^j_n + \tilde{\mathcal{A}}_i,\ \ \mathfrak{B}_1 = \Lambda^n_{11}\mathfrak{B}^1_n + \tilde{\mathcal{A}}_1.$$

Таким образом, имеет место

Теорема 5. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка $H(\Lambda, L)$-распределение порождает внутренним образом нормализации*

$$(\mathfrak{B}^\alpha_n, \mathfrak{B}_\alpha),\ (\mathfrak{B}^i_n, \mathfrak{B}_i),\ (\mathfrak{B}^1_n, \mathfrak{B}_1)$$

в смысле Нордена соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений.

3. Наконец, при построении нормалей 1-го рода и нормализаций H-, Λ-, L-подрасслоений будем исходить из задания поля квазитензора $\{L^\alpha_n\}$ (3.2):

$$\nabla L^\alpha_n + \omega^\alpha_n = L^\alpha_{nK}\omega^K. \tag{4.13}$$

По аналогии с прежними построениями (см. п. 1—2) находим последовательно

$$\nabla L^\alpha_{nK} + (L^\alpha_n L^n_{\gamma K} + L^\beta_n L^n_{\beta K}\delta^\alpha_\gamma)\omega^\gamma_n = L^\alpha_{nKL}\omega^L,$$

или

$$\begin{cases}\nabla L^\alpha_{n\beta} + (L^\alpha_n\Lambda^n_{\gamma\beta} + \delta^\alpha_\gamma L^\varepsilon_n L^n_{\varepsilon\beta})\omega^\gamma_n = L^\alpha_{n\beta L}\omega^L,\\ \nabla L^\alpha_{nn} - (L^\alpha_{n\beta} - L^\alpha_n\Lambda^n_{\beta n} - \delta^\alpha_\beta L^\gamma_n\Lambda^n_{\gamma n})\omega^\beta_n = L^\alpha_{nnL}\omega^L.\end{cases} \tag{4.14}$$

Введем следующие функции:

$$\mathcal{L}^\alpha_{n\beta} = L^\alpha_{n\beta} - L^\alpha_n L^\gamma_n L^n_{\gamma\beta},$$

которые в силу (4.14), (4.13), (2.1) удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\mathcal{L}^\alpha_{n\beta} = \mathcal{L}^\alpha_{n\beta K}\omega^K. \tag{4.15}$$

Для невырожденного тензора 2-го порядка $\{\mathcal{L}^\alpha_{n\beta}\}$ (4.15) построим обратный ему тензор $\{\tilde{\mathcal{L}}^{n\beta}_\gamma\}$:

$$\mathcal{L}^\alpha_{n\beta}\widehat{\mathcal{L}}^{n\beta}_\gamma = \delta^\alpha_\gamma,\ \ \mathcal{L}^\alpha_{n\beta}\tilde{\mathcal{L}}^{n\gamma}_\alpha = \delta^\gamma_\beta,\ \ \nabla\tilde{\mathcal{L}}^{n\beta}_\gamma \equiv 0. \tag{4.16}$$

Функции

$$\mathfrak{C}^\alpha_n = -\tilde{\mathcal{L}}^{n\alpha}_\beta(L^\beta_{nn} - L^\beta_n L^\gamma_n\Lambda^n_{\gamma n})$$

удовлетворяют уравнениям

$$\nabla\mathfrak{C}^\alpha_n + \omega^\alpha_n = \mathfrak{C}^\alpha_{nK}\omega^K, \tag{4.17}$$

как это следует из уравнений (4.16), (4.14), (4.13), (1.3).

Объекты $\{\mathfrak{C}^i_n\}$ и $\{\mathfrak{C}^1_n\}$ являются подобъектами квазитензора $\{\mathfrak{C}^\alpha_n\}$ (это следует из уравнений (4.13)):

$$\nabla\mathfrak{C}^i_n + \omega^i_n = \mathfrak{C}^i_{nK}\omega^K,\ \ \nabla\mathfrak{C}^1_n + \omega^1_n = \mathfrak{C}^1_{nK}\omega^K. \tag{4.18}$$

Итак, уравнения (4.17), (4.18) задают нормали 1-го рода соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений.

С помощью биекций Бомпьяни — Пантази (2.5), (2.9), (2.13) квазитензорам $\{\mathfrak{C}_n^\alpha\}$, $\{\mathfrak{C}_n^i\}$, $\{\mathfrak{C}_n^1\}$ поставим в соответствие тензоры $\{\mathfrak{C}_\alpha\}$, $\{\mathfrak{C}_i\}$, $\{\mathfrak{C}_1\}$, где

$$\mathfrak{C}_\alpha = \Lambda_{\alpha\beta}^n \mathfrak{C}_n^\beta + \mathcal{A}_\alpha, \;\; \mathfrak{C}_i = \Lambda_{ij}^n \mathfrak{C}_n^j + \tilde{\mathcal{A}}_i, \;\; \mathfrak{C}_1 = \Lambda_{11}^n \mathfrak{C}_n^1 + \tilde{\mathcal{A}}_1.$$

Итак, выполняется

Теорема 6. *$H(\Lambda, L)$-распределение внутренним образом порождает нормализации $(\mathfrak{C}_n^\alpha, \mathfrak{C}_\alpha)$, $(\mathfrak{C}_n^i, \mathfrak{C}_i)$, $(\mathfrak{C}_n^1, \mathfrak{C}_1)$ Нордена соответственно H-, Λ-, L-подрасслоений в дифференциальной окрестности 2-го порядка.*

13

4. Следует заметить, что каждая тройка

$$(\mathfrak{A}_n^\alpha, \mathfrak{B}_n^\alpha, \mathfrak{C}_n^\alpha), (\mathfrak{A}_n^i, \mathfrak{B}_n^i, \mathfrak{C}_n^i), (\mathfrak{A}_n^1, \mathfrak{B}_n^1, \mathfrak{C}_n^1)$$

квазитензоров, а также каждая тройка

$$(\mathfrak{A}_\alpha, \mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{C}_\alpha), (\mathfrak{A}_i, \mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_i), (\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1, \mathfrak{C}_1)$$

тензоров 2-го порядка функционально независима. Учитывая это замечание, в силу теорем 4—6 приходим к выводу.

Теорема 7. *В дифференциальной окрестности 2-го порядка $H(\Lambda, L)$-распределение внутренним образом порождает по три однопараметрических семейства нормализаций в смысле Нордена (σ, η, ζ — параметры) соответственно для H-, Λ-, L-подрасслоения:*

$$а)\; (\mathfrak{A}_n^\alpha(\sigma), \mathfrak{A}_\alpha(\sigma)), (\mathfrak{B}_n^\alpha(\eta), \mathfrak{B}_\alpha(\eta)), (\mathfrak{C}_n^\alpha(\zeta), \mathfrak{C}_\alpha(\zeta));$$

$$б)\; (\mathfrak{A}_n^i(\sigma), \mathfrak{A}_i(\sigma)), (\mathfrak{B}_n^i(\eta), \mathfrak{B}_i(\eta)), (\mathfrak{C}_n^i(\zeta), \mathfrak{C}_i(\zeta));$$

$$в)\; (\mathfrak{A}_n^1(\sigma), \mathfrak{A}_1(\sigma)), (\mathfrak{B}_n^1(\eta), \mathfrak{B}_1(\eta)), (\mathfrak{C}_n^1(\zeta), \mathfrak{C}_1(\zeta)).$$

Список литературы

1. *Попов Ю. И.* Скомпонованные гиперплоскостные распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. Сер.: Физико-математические и технические науки. 2018. № 2. С. 5—17.

2. *Лаптев Г. Ф.* Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Теоретико-групповой метод дифференциально-геометрических исследований // Тр. Московского математического общества. 1953. Т. 2. С. 275—382.

3. *Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М.* Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности. I // Тр. Геом. семинара. М., 1971. Т. 3. С. 49—94.

4. *Норден А. П.* Пространства аффинной связности. М., 1976.

5. *Алшибая Э. Д.* К геометрии распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве // Тр. Геом. семинара. М., 1974. Т. 5. С. 169—193.

6. *Алшибая Э. Д.* Геометрия распределений гиперплоскостных элементов в аффинном пространстве : учеб. пособие. Тбилиси, 1999.

7. *Попов Ю. И.* Введение в теорию регулярного гиперполостного распределения аффинного пространства // Вестник Балтийского федерального университета им. И. Канта. 2013. Вып. 10 : Физико-математические науки. С. 49—56.

Об авторе

Юрий Иванович Попов — канд. физ.-мат. наук, проф., Балтийский федеральный университет им. И. Канта, Россия.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru

The author

Dr Juriy I. Popov, Professor, I. Kant Baltic Federal University, Russia.

E-mail: yurij.popoff2015@yandex.ru