кой, а $\overset{2}{\gamma}$ -почти комплексной [I].

С аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$ ассоциируется пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, метрический тензор которого удовлетворяет условию переместительности. Значит, $V_{n+1,n}$ снабжено почти эрмитовой структурой.

Итак, доказаны

Теорема 3. В расслоенном пространстве $\overset{1}{A}_{n+1,n}$ определяется внутренним образом риманова связность с кручением и почти комплексная связность с кручением.

Теорема 4. Пространство римановой связности $V_{n+1,n}$, ассоциированное с аффиной связностью $\overset{1}{\gamma}$, несет почти эрмитову структуру со структурными объектами

Список литературы

I. Б е к л е м и ш е в Д.В. Дифференциальная геометрия пространств с почти комплексной структурой. В сб.: Геометрия. 1963. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., 1965, с. I65-2I0.

2. Л а п т е в Г.Ф. Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. "Тр. Моск. мат. о-ва", I953, №2, 275-382.

3. Л а п т е в Г.Ф., О с т и а н у И.М. (f,ε,η,ξ)--структура на дифференцируемых многообразиях. - В сб. Проблемы геометрии, I975 (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР). М., I975, 5-22.

4. П о л я к о в Н.Д., Структуры, индуцированные почти контактной структурой. - Тезисы докладов УI Всес. конф. по совр. пробл. геометр. Вильнюс, I975, I93-I95.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.7 1976

УДК 513.73

Ю.И. П о п о в

АФФИННЫЕ СВЯЗНОСТИ ВЫРОЖДЕННЫХ ГИПЕРПОЛОС. I

Продолжено исследование m-мерных вырожденных (как распадающихся, так и нераспадающихся) гиперполос CH^r_m ранга r проективного пространства P_n $(n > m > r)$, которые изучались ранее в работах [1], [2]. В данной работе показано, что аффинные связности без кручения первого и второго рода внутренним инвариантным образом присоединены в окрестности 3-го порядка образующего элемента вырожденной гиперполосы CH^r_m. Рассмотрены аналитические и геометрические признаки эквиаффинных связностей первого и второго рода конических и плоских вырожденных гиперполос CH^r_m [1].

Основным аналитическим аппаратом является аппарат внешних дифференциальных форм Картана, все построения в работе ведутся в инвариантной форме в репере I-го порядка, присоединенном к элементу гиперполосы CH^r_m.

1) Во всей работе используется следующая схема индексов: $p, q, t, s, f, \ldots = 1, 2, \ldots, r$; $i, j, k, \ell, \ldots = r+1, \ldots, m$;
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots = m+1, \ldots, n-1$; $\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K}, \mathcal{L}, \ldots = 0, 1, 2, \ldots, n$,

а также терминология и обозначения, введенные в статьях [1], [2].

2) Исследование проведем только для распадающихся гиперполос CH^r_m [I]. Однако аналогичные выводы и теоремы имеют место и для вырожденных нераспадающихся гиперполос CH^r_m [2].

I. Присоединим к элементу (A, r) распадающейся гиперполосы $CH^r_m \subset P_n$ подвижной проективный точечный репер $\{A_{\mathcal{J}}\}$ первого порядка [1].Точка $A\equiv A_0$ этого репера описывает τ-мерную поверхность V_τ —поверхность центров плоских образующих $E_s\,(s=m-\tau)$ базисной поверхности V_m^τ гиперполосы CH_m^τ. Семейство главных касательных гиперплоскостей $\tau^n(A)\equiv\tau(A)$ огибает тангенциально вырожденную гиперповерхность V_{n-1}^τ, распадающуюся на две тангенциально вырожденные поверхности V_{n-s-1}^τ и V_m^τ с общей направляющей поверхностью V_τ .Плоские $(n-\tau-1)$-мерные образующие $E_{n-\tau-1}$ гиперповерхности V_{n-1}^τ являются характеристиками гиперполосы CH_m^τ ,причем $E_s\subset E_{n-\tau-1}$.Точки $\{A_p\}$ этого репера принадлежат касательной τ-плоскости $T_\tau(A)$ поверхности V_τ ;точки $\{A_i\}$ - плоскости E_s ;точки $\{A_\alpha\}$ -плоской образующей E_{n-m-1} поверхности V_{n-s-1}^τ,где $E_{n-m-1}\subset E_{n-\tau-1}$,а точка A_n занимает произвольное положение,образуя с точками $\{A_0, A_p, A_i, A_\alpha\}$ проективный репер $\{A_\gamma\}$ пространства P_n .

Наряду с точечным подвижным репером $\{A_\gamma\}$ рассмотрим двойственный ему репер $\{\tau^\varkappa\}$,элементы которого $\tau^\varkappa$ являются гранями репера $\{A_\gamma\}$:

$$(A_\gamma, \tau^\varkappa)=\delta_\gamma^\varkappa.$$

В репере 1-го порядка распадающаяся гиперполоса $CH_m^\tau[1]$ задается уравнениями:

$$\omega_0^n=0, \quad (1) \qquad \omega_0^i=0, \quad (2) \qquad \omega_0^\alpha=0, \quad (3)$$

$$\omega_i^n=0, \quad (4) \qquad \omega_\alpha^n=0, \quad (5) \qquad \omega_i^\alpha=0, \quad (6)$$

$$\omega_\alpha^i=0, \quad (7) \qquad \omega_p^n=a_{pq}\omega^q,\ \det\|a_{pq}\|\neq 0, \quad (8)$$

$$\omega_i^p=b_i^{pq}\omega_q^n=b_i^{ps}a_{sq}\omega^q=a_{iq}^p\omega^q, \qquad (9)$$

$$\omega_p^i=b_{pq}^i\omega^q=b_{ps}^i a^{sq}\omega_q^n=a_p^{iq}\omega_q^n, \qquad (10)$$

$$\omega_\alpha^p=b_\alpha^{pq}\omega_q^n=b_\alpha^{ps}a_{sq}\omega^q=a_{\alpha q}^p\omega^q, \qquad (11)$$

$$\omega_p^\alpha=b_{pq}^\alpha\omega^q=b_{ps}^\alpha a^{sq}\omega_q^n=a_p^{\alpha q}\omega_q^n, \qquad (12)$$

где ω^p и ω_p^n —базисные формы гиперполосы CH_m^τ ,отнесенной соответственно к точечному реперу $\{A_\gamma\}$ или к тангенциальному реперу $\{\tau^\varkappa\}$; a^{pq}—элементы матрицы $\|a^{pq}\|$ обратной матрице $\|a_{pq}\|$: $a_{pq}a^{qt}=\delta_p^t$, а величины $b_{pq}^i, b_i^{pq}, b_\alpha^{pq}, b_{pq}^\alpha$, a_{pq} (основной двухвалентный тензор гиперполосы) симметричны по индексам p, q .Кроме того,коэффициенты уравнений (9)-(12) связаны конечными соотношениями:

$$a_{iq}^p b_{pt}^\alpha=a_{it}^p b_{pq}^\alpha, \qquad (13)$$

$$a_{\alpha q}^p b_{pt}^i=a_{\alpha t}^p b_{pq}^i. \qquad (14)$$

Уравнения (1)-(3) задают поверхность $V_\tau\subset V_m^\tau$; уравнения (1),(2),(5),(7),(10),(11),(14) определяют тангенциально вырожденную поверхность V_{n-s-1}^τ;уравнения (1),(3),(4), (6),(12),(13)-базисную поверхность $V_m^\tau\subset CH_m^\tau$.

Известно [1],[2],что величины

$$c_{pq}^i=b_{pq}^i-\Lambda^i a_{pq}, \quad (15) \qquad c_{pq}^\alpha=b_{pq}^\alpha-\Lambda^\alpha a_{pq}, \quad (16)$$

$$c_i^{pq}=b_i^{pq}-\Lambda_i a^{pq}, \quad (17) \qquad c_\alpha^{pq}=b_\alpha^{pq}-\Lambda_\alpha a^{pq} \quad (18)$$

являются тензорами 2-го порядка,а величины:

$$\Lambda_p=-\tfrac{1}{2}(d_p+l_p), \quad \Lambda^p=-\tfrac{1}{2}(d^p+l^p) \qquad (19)$$

являются квазитензорами 3-го порядка распадающейся гиперполосы CH_m^τ .

Для того,чтобы гиперполоса CH_m^τ была конической [1], необходимо и достаточно,чтобы выполнялись условия:

$$c_\alpha^{pq}=c_i^{pq}=0 \qquad (20)$$

или

$$a_{iq}^p=a_i\delta_q^p\ ;\ a_{\alpha q}^p=a_\alpha\delta_q^p, \qquad (21)$$

где a_i и a_α квазитензоры 2-го порядка:

$$\nabla_\delta a_i=-a_i\pi_0^0+\pi_i^0;\quad \nabla_\delta a_\alpha=-a_\alpha\pi_0^0+\pi_\alpha^0.$$

Аналогично условия

$$c^{i}_{pq} = c^{\alpha}_{pq} = 0 \tag{22}$$

или

$$a^{iq}_{p} = \lambda^{i}\delta^{q}_{p} ; \quad a^{\alpha q}_{p} = \lambda^{\alpha}\delta^{q}_{p} , \tag{23}$$

где λ^i и λ^α —квазитензоры 2-го порядка-являются характеристическими признаками плоских распадающихся гиперполос CH^{τ}_{m} [I].

II.Система форм $\Theta^p = \omega^p$ и $\Theta^p_s = \omega^p_s - \delta^p_s\omega^0_0 + x^p_{sq}\omega^q$ определяет первое пространство аффинной связности без кручения ($R^p_{s\ell} = 0$), ассоциированное с базисной поверхностью V^τ_m гиперполосы CH^τ_m, если

$$\nabla_s x^p_{s\ell} = - x^p_{s\ell}\pi^0_0 + a_{s\ell}\pi^p_n - 2\delta^p_{(s}\pi^0_{\ell)} . \tag{24}$$

Действительно, непосредственной проверкой убеждаемся, что система форм Θ^p и Θ^p_s при условии (24) удовлетворяет структурным уравнениям Картана-Лаптева [3]:

$$\mathcal{D}\Theta^p = \Theta^s\wedge\Theta^p_s ; \quad \mathcal{D}\Theta^p_q = \Theta^s_q\wedge\Theta^p_s + R^p_{qs\ell}\Theta^s\wedge\Theta^\ell .$$

Система величин

$$x^p_{s\ell} = T^p_{s\ell} - a_{s\ell}\Lambda^p - 2\delta^p_{(s}\Lambda_{\ell)} , \tag{25}$$

где $T^p_{s\ell} = T^p_{\ell s}$ – тензор: $\nabla_\delta T^p_{s\ell} + \pi^0_0 T^p_{s\ell} = 0$, удовлетворяет уравнениям (24).

Аналогично убеждаемся, что система форм $\vartheta_p = \omega^n_p$ и $\vartheta^q_p = \omega^q_p - \delta^q_p\omega^n_n + x^{q\ell}_p\omega^n_\ell$ определяет второе пространство аффинной связности без кручения ($R^{\ell t}_p = 0$), ассоциированное с тангенциально вырожденной гиперповерхностью $V^\tau_{n-1}\subset CH^\tau_m$, если

$$x^{q\ell}_p = T^{q\ell}_p - a^{q\ell}\Lambda_p - 2\delta^{(q}_p\Lambda^{\ell)} , \tag{26}$$

где $T^{q\ell}_p = T^{\ell q}_p$ —тензор: $\nabla_\delta T^{q\ell}_p - T^{q\ell}_p\pi^n_n = 0$.

Таким образом, первое и второе пространства аффинной связности без кручения внутренним инвариантным образом присоединяются в окрестности 3-го порядка элемента рас-

падающейся гиперполосы CH^τ_m.

III.Рассмотрим нормализованную в смысле А.П.Нордена распадающуюся гиперполосу CH^τ_m [1]; в репере, адаптированном данной нормализации, имеем:

$$\omega^0_p = c_{pq}\omega^q , \quad \omega^p_n = c^p_q\omega^q \tag{27}$$

или

$$\omega^0_p = \lambda^q_p\omega^n_q , \quad \omega^p_n = \lambda^{pq}\omega^n_q , \tag{28}$$

где

$$\lambda^{pq} = c^p_s a^{sq} , \quad \lambda^q_p = c_{ps}a^{sq} . \tag{29}$$

Тензоры кривизны пространств аффинной связности имеют тогда соответственно вид:

$$R^p_{qt\ell} = 2\left[a_{q[t}c^p_{\ell]} + c_{q[t}\delta^p_{\ell]} - \delta^p_q c_{[t\ell]} - a^p_{i[t}b^i_{\ell]q} - a^p_{\alpha[t}b^\alpha_{\ell]q}\right] , \tag{30}$$

$$R^{qt\ell}_p = 2\left[\delta^q_p\lambda^{[t\ell]} - \lambda^{q[t}\delta^{\ell]}_p - a^{q[t}\lambda^{\ell]}_p + a^{i[t}_p b^{\ell]q}_i + a^{\alpha[t}_p b^{\ell]q}_\alpha\right] . \tag{31}$$

В силу условий (20)-(23) из соотношений (30) и (31) следует, что для конических и плоских гиперполос CH^τ_m тензоры Риччи соответствующих пространств аффинной связности имеют строение:

$$R_{qt} = R^s_{qts} ; \quad R^{qt} = R^{qts}_s ;$$

$$R_{[qt]} = (\tau+1)\,c_{[qt]} - a_{s[q}c^s_{t]} , \tag{32}$$

$$R^{[qt]} = -(\tau+1)\,\lambda^{[qt]} + a^{s[q}\lambda^{t]}_s . \tag{33}$$

Из равенств (32), (33), (29) следуют теоремы:

Т е о р е м а 1. Для конических и плоских гиперполос аффинная связность I-го рода (2-го рода) является эквиаффинной тогда и только тогда, когда соответственно выполняются условия:

$$a_{s[q}C^{s}_{t]} = (\tau+1)\,C_{[qt]}\,, \tag{34}$$

$$(\tau+1)\,\lambda^{[qt]} = a^{s[q}\lambda^{t]}_{s}\,. \tag{35}$$

Т е о р е м а 2. Внутренние геометрии первого и второго пространств аффинных связностей, индуцируемых полями инвариантных нормалей распадающейся конической (плоской) гиперполосы CH^{τ}_{m}, являются одновременно эквиаффинными.

Известно [2], что уравнение поля соприкасающихся гиперквадрик распадающейся конической (плоской) гиперполосы имеет вид:

$$a_{pq}x^{p}x^{q} + 2d_{p}x^{p}x^{n} + (T_{0}+\sigma\ell_{0})(x^{n})^{2} = 2x^{0}x^{n}, \tag{36}$$

где σ – любой абсолютный инвариант, ℓ_0, d_p – геометрические объекты 2-го порядка; T_0 – третьего порядка данной гиперполосы CH^{τ}_{m} [2];

$$\nabla d_{p} = -d_{p}\,\omega^{0}_{0} + a_{ps}\,\omega^{s}_{n} - \omega^{0}_{p} + t_{pq}\,\omega^{q}. \tag{37}$$

Полярой прямой AA_n относительно вырожденной гиперквадрики (36), является ($\tau-1$)-мерная плоскость $E_{\tau-1}=[A_p]$, уравнение которой есть

$$d_{p}x^{p} - x^{0} = 0;\quad x^{n}=0,\ x^{\alpha}=0,\ x^{i}=0. \tag{38}$$

Чтобы эта плоскость была нормалью 1-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1}, т.е. совпадала с плоскостью $\Pi_{n-1}\equiv[M_p=A_p+x^0_pA_0]$, необходимо и достаточно, чтобы

$$d_{p} \equiv 0\,. \tag{39}$$

Из уравнений (37),(27),(28),(39) непосредственно следует:

Т е о р е м а 3. Если коническая (плоская) распадающаяся гиперполоса $CH^{\tau}_{m}\subset P_n$ нормализована так, что поля нормалей 1-го и 2-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} являются полярно сопряженными относительно поля соприкасающихся (вырожденных) гиперквадрик (36), то соответствующая аффинная связность без кручения 1-го рода (2-го рода) эквиаффинна тогда и только тогда, когда тензор C_{pq} (λ^{pq}) симметрический.

О п р е д е л е н и е. Многообразие $X^{\tau-1}_{\tau}$ нормалей 1-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} – многообразие плоскостей $E_{\tau-1}=[A_p]$ – назовем гармоничным данной гиперповерхности V^{τ}_{n-1} [4], если тензор C_{pq}, соответствующий этой нормализации, симметрический, т.е.

$$C_{[pq]} = 0\,. \tag{40}$$

Многообразие $X^{n-\tau}_{\tau}$ нормалей 2-го рода гиперповерхности V^{τ}_{n-1} – многообразие плоскостей $E_{n-\tau}=[A_0,A_i,A_\alpha,A_n]$ – назовем сопряженным данной гиперповерхности V^{τ}_{n-1} [4], если тензор λ^{pq}, соответствующий этой нормализации, симметрический, т.е.

$$\lambda^{[pq]} = 0. \tag{41}$$

В силу этого определения нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m}, относительно которой выполняется условие (40), назовем гармоничной нормализацией данной гиперполосы; нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m}, относительно которой выполняется условие (41), назовем сопряженной нормализацией данной гиперполосы. В случае выполнения обоих условий (40),(41) нормализацию гиперполосы CH^{τ}_{m} назовем вполне гармоничной.

Т е о р е м а 4. Эквиаффинные связности 1-го и 2-го рода конической (плоской) распадающейся гиперполосы CH^{τ}_{m}, индуцируемые гармоничной (сопряженной) нормализацией этой гиперполосы, являются одновременно эквипроективными.

Список литературы

1. П о п о в Ю.И. Мишенина Т.И. Инвариантное оснащение распадающейся (n-2)-мерной гиперполосы CH^{τ}_{n-2} ранга τ многомерного проективного пространства P_n.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.5, Калининград, 1974, 103-130.

2. П о п о в Ю.И. Внутренние оснащения вырожденной m-мерной гиперполосы H^{τ}_{m} ранга τ многомерного проективного пространства.- Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып.6, 1975, 102-142.

3. О с т и а н у Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И. Очерк научных исследований Г.Ф.Лаптева.-"Тр.геом.семинара ВИНИТИ", 1973, т.4, 7-70.

4. Н о р д е н А.П. Пространства аффинной связности, 1950.